Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Gabriel Motomu Teshima
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

2022 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do texto © 2022 Os autores
Copyright da edição © 2022 Atena Editora
Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.
Open access publication by Atena Editora

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial
Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre
Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Mariane Aparecida Freitas
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F736 O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0029-5
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.295220604

1. Matemática. 2. Ensino. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um "novo normal" demandado pela Pandemia da Covid-19; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2***" nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 ..... **1**

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL E FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Julio Robson Azevedo Gambarra

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206041

CAPÍTULO 2 ..... **13**

O CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO E OS DIÁLOGOS INTERDISCIPLINARES DO COMPONENTE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NA REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

Alexandre Souza de Oliveira

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206042

CAPÍTULO 3 ..... **25**

RECOMMENDATIONS ABOUT THE BIG IDEAS IN STATISTICS EDUCATION: A RETROSPECTIVE FROM CURRICULUM AND RESEARCH

J. Michael Shaughnessy

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206043

CAPÍTULO 4 ..... **42**

USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TIEMPOS DE COVID-19, PUCALLPA 2021

Mariano Magdaleno Mendoza Carlos
Angel Hasely Silva Mechato
Ronald Marlon Lozano Reátegui
Vitelio Asencios Tarazona
Manuel Ricardo Guerrero Ochoa
Iris Olivia Ruiz Yance
Weninger Pinedo Chambi

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206044

CAPÍTULO 5 ..... **55**

CONVIVÊNCIA ESCOLAR EM TEMPOS DE PANDEMIA: INVESTIGANDO OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Henrique Kuller dos Santos
Joyce Jaquelinne Caetano

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206045

CAPÍTULO 6 ..... **65**

AL-BIRUNI E A MATEMÁTICA PRÁTICA DO SÉCULO XI: UM ESTUDO SOBRE ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES

Francisco Neto Lima de Souza
Giselle Costa de Sousa

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206046

CAPÍTULO 7 ..... **75**

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Rosangela Teixeira Guedes

Marcos Felipe de Oliveira

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206047

CAPÍTULO 8 ..... **90**

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTEGRADO AO SOFTWARE GEOGEBRA PARA ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Joe Widney Lima da Silva

Elisangela Dias Brugnera

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206048

CAPÍTULO 9 ..... **102**

IDENTIDADES POLINOMIAIS z_2-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2x2

Mateus Eduardo Salomão

Evandro Riva

https://doi.org/10.22533/at.ed.2952206049

CAPÍTULO 10 ..... **107**

OS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS DA BAHIA: COMO ARTICULAM OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS À DOCÊNCIA?

Raquel Sousa Oliveira

Américo Junior Nunes da Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060410

CAPÍTULO 11 ..... **133**

R/EXAMS COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO REMOTO: UM ENFOQUE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÔNICAS

Luzia Pedroso de Oliveira

Denise Helena Lombardo Ferreira

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060411

CAPÍTULO 12 ..... **143**

FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU E SUAS APLICAÇÕES EM GRÁFICOS CARTESIANOS

Caroline Saemi Lima Fujimoto

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060412

CAPÍTULO 13 ..... **165**

GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: ENTRE CONCEPÇÕES, PLANOS E AÇÕES

Amanda Souza Araújo

Simone Damm Zogaib

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060413

CAPÍTULO 14 ..... **178**

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: TRABALHANDO CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO

Cristiano Santana Freitas
Lucília Batista Dantas Pereira

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060414

CAPÍTULO 15 ..... **195**

UTILIZAÇÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA DIFERENCIADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Cassia Bordim Santi

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060415

CAPÍTULO 16 ..... **202**

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL ATRAVÉS DO LÚDICO: UMA REVISÃO NARRATIVA

Fernnanda Luciano Fernandes
Rosangela Minto Simões
Carla Corrêa Pacheco Gomes
Vanilza Maria Rangel de Moraes
Maristela Athayde Rohr

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060416

CAPÍTULO 17 ..... **216**

EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM SALA DE AULA – APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Fernanda Gonzalez Anhõn
André Ribeiro da Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060417

CAPÍTULO 18 ..... **228**

RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DEWEYANA E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

Lênio Fernandes Levy

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060418

CAPÍTULO 19 ..... **239**

ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA

João Socorro Pinheiro Ferreira

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060419

CAPÍTULO 20 ..... **263**

O USO DE *PODCAST* NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA AOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Deyse Mara Nieto Lyrio

Elizabeth Cristina Oliveira Pontes
Valdinei Cezar Cardoso

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060420

CAPÍTULO 21 278

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA
Maria Carla Ferreira Pereira Tavares
Rudimar Luiz Nós

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060421

CAPÍTULO 22 296

SIMULATED ANNEALING E ALGORITMO GENETICO NA DETERMINAÇÃO DE POLÍGONOS MÁGICOS
Josimar da Silva Rocha

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060422

CAPÍTULO 23 305

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ALTERNATIVA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM
Daniela dos Santos Vargas
Victor Hugo de Oliveira Henrique

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060423

CAPÍTULO 24 312

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
Débora Gaspar Soares
Márcio Rufino Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060424

CAPÍTULO 25 323

AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: EM FOCO OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL
Ana Paula dos Santos Stelle
Joyce Jaquelinne Caetano

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060425

CAPÍTULO 26 331

IDENTIDADES POLINOMIAIS *G*-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES *n*X*n* SOBRE UM CORPO FINITO
Mateus Eduardo Salomão
Evandro Riva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060426

CAPÍTULO 27 ..... **336**

UMA REFLEXÃO SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Francisco Odecio Sales

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva

https://doi.org/10.22533/at.ed.29522060427

SOBRE O ORGANIZADOR **355**

ÍNDICE REMISSIVO **356**

CAPÍTULO 1

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL E FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Data de aceite: 01/03/2022

Julio Robson Azevedo Gambarra
Doutor em Educação Matemática pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista (UNESP)/ *Campus* Rio Claro/SP. Mestre em Educação pela Universidade Cidade de São Paulo. Professor do Departamento Acadêmico de Ciências da Educação da Universidade Federal de Rondônia (UNIR)/*Campus* Vilhena/RO. Líder e pesquisador do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias Digitais (GEPEMAT) da UNIR. Coordenador do Laboratório Multimídia de Ensino e Educação Matemática (LabMEEM)

RESUMO: O trabalho é resultado de uma investigação teórica sobre a formação do professor que ensina matemática nos primeiros anos da educação básica no Brasil. O objetivo geral foi investigar a formação matemática durante a graduação. O problema foi ancorado na questão: que aspectos são considerados sobre a abordagem do ensino e aprendizagem da matemática nos cursos de graduação que formam professores para ensinar nos primeiros anos da educação básica? Um resgate do processo histórico e da legislação educacional que norteia a formação inicial foi feito. O objetivo foi identificar como, em diferentes momentos da história da educação brasileira, foi contemplada a preparação de professores para ensinar matemática nos primeiros anos da educação básica. Com base em pressupostos teóricos, o estudo permitiu as seguintes indicações: 1. Conhecer o processo histórico sobre a formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais da educação básica. 2. Compreender o formato do ensino de matemática proposto pelo poder público brasileiro. 3. Especificar o conteúdo de matemática na legislação que orienta o curso inicial de formação de professores para os anos iniciais da eduacação básica. 4. Expandir, durante o treinamento de graduação, o foco no conhecimento teórico e na prática docente das disciplinas que abordam a metodologia e o conteúdo matemático. 5. Aumentar a conscientização sobre a possibilidade de trabalhar com projetos, deixando o paradigma do exercício, dentro de uma concepção de educação matemática crítica. 6. focar em conhecimento matemático significativo.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Formação de Professores, Matemática, Ensino de Matemática.

MATHEMATICS EDUCATION IN BRAZIL AND TEACHER TRAINING FOR BASIC EDUCATION

ABSTRACT: The work is the result of a theoretical research on teacher education that teaches mathematics in the early years of basic education in Brazil. The overall goal was to investigate mathematical training during graduation. The problem was anchored in the question: what aspects are considered about the approach to mathematics teaching and learning in undergraduate courses that train teachers to teach in the early years of basic education? A rescue of the historical process and

the educational legislation that guides the initial formation was made. The objective was to identify how, at different times in the history of Brazilian education, the preparation of teachers to teach mathematics in the early years of basic education was contemplated. Based on theoretical assumptions, the study allowed the following indications: 1. Know the historical process of teacher education that teaches mathematics in the early years of basic education. 2. Understand the format of mathematics teaching proposed by the Brazilian government. 3. Specify the math content in the legislation that guides the initial teacher education course for the early years of basic education. 4. Expand, during undergraduate training, the focus on theoretical knowledge and teaching practice of disciplines that address methodology and mathematical content. 5. Raise awareness of the possibility of working with projects, leaving the exercise paradigm within a conception of critical mathematics education. 6. focus on significant mathematical knowledge.
KEYWORDS: Mathematical Education, Teacher Training, Mathematics, Mathematics Teaching.

1 I INTRODUÇÃO

A delimitação dos períodos históricos citados neste trabalho foi fundamentada a partir de estudos realizados por Fusari (1992) e Curi (2005) a respeito da formação de professores polivalentes no âmbito do sistema educacional brasileiro. Os estudos de Fusari (1992) fazem referência às diferentes características do que se compreende por “competência docente”, nos diferentes momentos da história.

A respeito dos distintos períodos históricos da formação do professor que leciona nos primeiros anos na educação básica brasileira, Curi (2005) afirma, que o primeiro período começa com a criação do Curso Normal e termina com a sua extinção por força da Lei Federal nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. A lei referenciada estabeleceu a formação de professores polivalentes nos cursos de habilitação para o magistério em nível de segundo grau, atual nível médio, e também possibilitou ao graduado em cursos de Pedagogia fazer opção pela habilitação magistério e lecionar nos anos iniciais do primeiro grau, atual ensino fundamental.

O Curso Normal, foi instituído em 15 de outubro de 1827, pela primeira Lei da Educação no Brasil, de cunho nacional e tinha como finalidade, formar professores para atuar nas escolas das Primeiras Letras. No entanto, o primeiro Curso Normal do país foi instalado apenas, sete anos depois, no ano de 1835.

Em 15 de outubro de 1827, o Imperador D. Pedro I assinou a primeira Lei de Educação no Brasil, de âmbito nacional, criando as Escolas de Primeiras Letras em todas as cidades, vilas e lugares mais populosos do Império. Durante o período inicial do império, as leis e os decretos não tinham numeração, sendo diferenciadas pela data e quanto à natureza da matéria.

O segundo período principia-se com a promulgação da Lei Federal nº 5.692/1971 e termina com a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei

Federal nº 9.394/1996, de 20 de dezembro de 1996, que institui a formação de professores para os primeiros anos da educação básica em nível superior.

E ainda, conforme Curi (2005), o terceiro período inicia-se com a promulgação da Lei Federal nº 9.394/1996, que entre outras atribuições, orienta a formação dos professores para os primeiros anos da educação básica, até os dias atuais. Entende-se por anos iniciais da educação básica, o ensino fundamental do 1º ao 5º ano.

Foi referente a alguns aspectos da formação do professor no terceiro período histórico que este trabalho se desenvolveu.

2 | DESENVOLVIMENTO

Com a promulgação da Constituição brasileira, em 05 de outubro de 1988, passou a vigorar no país, um novo formato para a educação nacional, em todos os níveis de ensino. As referências a educação, estão especificadas na Carta Magna brasileira, do Art. 205 ao Art. 214.

Em 20 de dezembro de 1996, foi sancionada a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional, Lei Federal nº 9.394, que estabeleceu a obrigatoriedade da formação do professor para a educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental em nível superior.

> Art. 62. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nos 5 (cinco) primeiros anos do ensino fundamental, a oferecida em nível médio na modalidade normal. (Redação dada pela Lei Federal nº 12.796, de 4 de abril de 2013).

A legislação determina que a formação para o exercício da docência seja em nível superior, embora admita a formação em nível médio na modalidade normal, como exigência mínima para a docência na educação infantil e nos 5 (cinco) primeiros anos do ensino fundamental.

A exigência de formação superior em curso de Pedagogia não altera o que já vinha ocorrendo com a formação para ensinar matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, ou seja, um profissional com formação polivalente, domínio e conhecimento em outras áreas do saber humano.

Em 6 de fevereiro de 2006, a Lei Federal nº 11.274 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e ampliou a duração do ensino fundamental de oito para nove anos, estabelecendo a obrigatoriedade de a criança adentrar ao ensino formal aos seis anos de idade.

O Art. 32 da LDB passou a vigorar com a seguinte redação:

> Art. 32. O ensino fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos, gratuito na escola pública, iniciando-se aos 6 (seis) anos de idade, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante: (Redação dada pela Lei Federal nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006).

> I - O desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo.

Destaco que o inciso I, do mesmo artigo 32, estabelece para o ensino fundamental o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo. Entendo que a exigência legal do pleno domínio do cálculo requer maior preparo específico na formação do pedagogo para o ensino da matemática. Talvez, isso implique na busca de possibilidades de formação complementar em matemática. Indico, como alternativa, a formação em cursos de pós-graduação *lato sensu*, ou ampliar, durante a formação inicial do pedagogo, o foco no conhecimento teórico e na prática de ensino das disciplinas que abordam o conteúdo matemático que é trabalhado nos anos iniciais do ensino fundamental.

Com relação ao pleno domínio do cálculo, estudos mais recentes a respeito das competências matemáticas, segundo Nacarato, Mengali e Passos (2011), mostram que apenas as competências de cálculo não bastam, pois não atendem às exigências da sociedade contemporânea.

A perspectiva e a visão de Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 32), a respeito de aprender e ensinar matemática nos anos iniciais é:

> O mundo está cada vez mais matematizado, e o grande desafio que se coloca à escola e aos seus professores é construir um currículo de matemática que transcenda o ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização matemática.

Dentro de uma visão de educação matemática crítica e do entendimento que o mundo está cada vez mais matematizado, Skovsmose (2001, p. 51), afirma:

> Matematizar significa, em princípio, formular, criticar e desenvolver maneiras de entendimento. Ambos, estudantes e professores, devem estar envolvidos no controle desse processo, que, então, tomaria uma forma mais democrática.

Dentro dessa visão crítica, compartilho, mais uma vez, a visão de Skovsmose (2001, p. 66) a respeito de alfabetização matemática: “A alfabetização não é apenas uma competência relativa à habilidade de leitura e escrita, uma habilidade que pode ser simultaneamente testada e controlada; possui também uma dimensão crítica”.

Skovsmose (2001) mostra que a perspectiva crítica nos faz pensar em uma educação matemática como prática de possibilidades de inclusão social.

Para Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 33 e 34), “A matemática precisa ser compreendida como um patrimônio cultural da humanidade, portanto um direito de todos. Daí a necessidade de que ela seja inclusiva”.

Para essa visão se consolidar, segundo Skovsmose (2008) e Alroe e Skovsmose (2006), é necessário romper com o tradicional paradigma do exercício.

Segundo Skovsmose (2008), há diferentes formas de romper com esse modelo. Uma delas é através da realização de projetos, cuja dinâmica o autor denomina de “cenários de investigação”.

Conceber a aula de matemática dentro desse ambiente de aprendizagem requer uma nova postura do professor, diferente daquela defendida pelo modelo de aula tradicional, isto é, o professor expõe algumas ideias matemáticas com alguns exemplos e, em seguida, os alunos resolvem uma lista de exercícios.

Em função do exposto, indico a possibilidade de conscientizar o professor a respeito da possibilidade de trabalhar com projetos, deixando o paradigma do exercício, dentro de uma concepção de educação matemática crítica, focando no conhecimento matemático significativo, isto é, com aplicação para o dia-a-dia.

Como nos diz Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 35), dentro desse "cenário de investigação" é requerida do professor uma nova postura. Os autores completam:

> Ele continua tendo papel central na aprendizagem do aluno, mas de forma a possibilitar que esses cenários sejam criados em sala de aula; é o professor quem cria as oportunidades para a aprendizagem – seja na escolha de atividades significativas e desafiadoras para seus alunos, seja na gestão de sala de aula: nas perguntas interessantes que faz e que mobilizam os alunos ao pensamento, à indagação; na postura investigativa que assume diante da imprevisibilidade sempre presente numa sala de aula; na ousadia de sair da "zona de conforto" e arriscar-se na "zona de risco".

Penteado (2004), ao falar da noção de "zona de conforto" e "zona de risco", diz que, enquanto na "zona de conforto" a prática se pauta na previsibilidade, na "zona de risco" o professor precisa estar preparado para os imprevistos postos pela ação educativa.

Por fim, Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 34) explicam e defendem que, essa perspectiva sugere que […] a aprendizagem da matemática não ocorra por repetições e mecanizações, mas se trata de uma prática social que requer envolvimento do aluno em atividades significativas".

Refletindo a respeito dos desafios e perspectivas da formação inicial de professores para ensinar matemática, Curi (2011, p. 77) afirma que:

> Tanto no curso de Pedagogia como no curso de Licenciatura em Matemática, os alunos pautam o conhecimento matemático a forma com que aprenderam, com uma relação marcada pela racionalidade técnica, ou seja, o conhecimento que julgam necessitar para ensinar é tido como o que irão receber na formação inicial, supostamente suficiente para o seu desempenho e consideram que tudo o que não foi aprendido na formação inicial carece de "nova" formação.

Curi (2011, p. 77) considera que um grande desafio que os cursos de licenciatura, tanto em Pedagogia quanto em Matemática, encontra, refere-se à questão da motivação dos alunos para a matemática, além da apropriação de conhecimentos. E afirma:

> Um grande desafio que esses cursos têm pela frente é que há necessidade de desenvolver nos seus alunos o gosto de ser professor para ensinar Matemática e ainda promover situações para que eles se apropriem de conhecimentos necessários para uma atuação profissional de qualidade.

Ainda, segundo Curi (2011), nas últimas 3 décadas, o crescimento da área de

Educação Matemática ampliou consideravelmente o número de pesquisas voltadas para o setor, que podem auxiliar a prática do professor, e nos indica que há pelo menos três correntes de pensamento sobre formação matemática do professor no Brasil.

- Uma delas defende o pressuposto que um "sólido" conhecimento matemático é condição necessária e suficiente para ensinar.

  Em geral, os defensores dessa linha consideram que a didática se aprende na prática profissional e será bom professor aquele que tem dom para exercer essa profissão.

- Outra linha, talvez na tentativa de contrapor-se à anterior, coloca demasiada ênfase na formação pedagógica, passando a ideia de que um professor não precisa de grandes conhecimentos matemáticos para ensinar.
- A terceira é a que compreende a importância da articulação entre conhecimentos matemáticos e conhecimentos didáticos pedagógicos na formação de professores de Matemática.

Entendo que dois aspectos devem ser considerados, simultaneamente, na formação matemática do pedagogo.

O primeiro aspecto é que o conteúdo a ser ministrado no componente curricular, que aborda conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental, esteja diretamente relacionado com a formação e o conhecimento que o professor tem a respeito da matemática.

Freire (2014, p. 93) nos ensina: "Como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha. Não posso ensinar o que não sei".

Isso implica no que já defendi, anteriormente, neste trabalho: a busca de possibilidades de formação específica complementar em educação matemática em cursos de pós-graduação *lato sensu*.

O segundo aspecto diz respeito à didática e à metodologia do ensino da matemática, que considero atributos agregadores e necessários. Entendo que o futuro professor tem a oportunidade de adquiri-los na formação inicial em curso de licenciatura em Pedagogia.

Entretanto, como já foquei no primeiro aspecto, é necessário o domínio do conteúdo específico de matemática.

A respeito desse assunto, Baumann (2009, p. 102), afirma: "[...] acreditamos que só é possível focar a dimensão didática se há um domínio dos conteúdos a serem trabalhados".

É, portanto, da terceira compreensão abordada por Curi (2011, p. 77), que comunga o meu pensamento, pois um não nega o outro, senão que se complementam nessa rede de interligação: o conteúdo e a didática.

Entretanto, um fato chama bastante atenção na formação do professor em curso de licenciatura em Pedagogia.

Em uma pesquisa realizada por Curi (2005, p. 61), a respeito da formação nos cursos de Pedagogia, a pesquisadora analisou como as instituições de ensino superior incorporaram as orientações oficiais quanto à formação docente, com ênfase na oferta de disciplinas voltadas à formação matemática dos futuros professores e suas respectivas ementas. Segundo a pesquisa, a disciplina que,

> […] apareceu com mais frequência nas grades curriculares dos cursos analisados foi Metodologia de Ensino de Matemática, presentes em cerca de 66% das grades. Se considerarmos que outros 25% dos cursos têm na grade curricular a disciplina Conteúdos e Metodologia de Ensino de Matemática, é possível afirmar que cerca de 90% dos cursos de Pedagogia elegem as questões metodológicas como essenciais à formação de professores polivalentes.

A partir da pesquisa de Curi (2005), posso afirmar que, nos cursos de Pedagogia, as disciplinas que abordam o conteúdo de matemática têm carga horária bastante reduzida.

É claro que não se deve avaliar a qualidade da formação de um curso apenas analisando as ementas das disciplinas, mas esse aspecto não deixa de ser um fator significativo a ser considerado.

A partir de uma proposta de formação continuada, depois que foi sancionada a atual LDB, o Ministério de Educação, no ano de 1997, divulgou um conjunto de orientações em nível nacional, intitulado de Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (BRASIL, 1997), cujo objetivo era auxiliar o professor na execução do seu trabalho.

O volume 3 dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), foi dedicado ao ensino de matemática para o ensino fundamental e fez indicações segnificativas.

A seguir, destaco alguns aspectos legais que considero importantes sobre formação do pedagogo, isto é, aspectos que dizem respeito à formação inicial do docente que, além de receber formação para ensinar matemática nos primeiros anos da educação básica, também recebe formação para lecionar outras disciplinas.

O Conselho Nacional de Educação (CNE), através do Conselho Pleno (CP) instituiu, por meio da Resolução CNE/CP nº 1, de 15 de maio de 2006, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a formação de professores em curso de graduação em Pedagogia, licenciatura.

> Art. 5º O egresso do curso de Pedagogia deverá estar apto a:
>
> VI - ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano;

Portanto, a fundamentação jurídica, aí exposta, deixa claro que o profissional formado em curso de licenciatura em Pedagogia é o responsável pelo ensino do conteúdo de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, além do domínio do conhecimento em outras áreas do saber humano.

Para cada uma das disciplinas citadas, e também para a matemática, existe uma

formação específica, realizada em curso superior de licenciatura, para professores que atuam do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para o curso de licenciatura em pedagogia, aprovadas no ano de 2006, não ficam especificados os conteúdos de matemática. Segundo Baumann (2009, p. 102), "Na proposta ora aprovada não fica evidente o estudo dos conteúdos específicos que fazem parte da Educação Básica e, por conseguinte, o estudo dos conteúdos de Matemática".

Não existindo a especificação dos conteúdos de matemática na legislação que norteia o curso de formação de professores em Pedagogia, isto é, nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), as Instituições de Ensino Superior (IES), podem sentir-se desobrigadas a ministrá-los. Portanto, indico especificar os conteúdos de matemática na legislação que norteia o curso de formação de professores em Pedagogia, isto é, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN).

Provavelmente, resida nesse fato uma das características da formação matemática do pedagogo: enfrentar o desafio de ensinar o que nem sempre domina ou aprendeu.

Alunos com dificuldades de aprendizagem matemática impõem ao pedagogo, muitas vezes, que domine conhecimentos que ele não possui, porque não teve acesso em sua formação inicial a conteúdos específicos.

Através da Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015, o Conselho Nacional de Educação (CNE), por meio do Conselho Pleno (CP), estabeleceu novas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a formação em nível superior em cursos de licenciaturas. Ampliou-se as exigências impostas, dentre outras as que se referem ao tempo de estágio supervisionado, que foi aumentado para 400 (quatrocentas) horas.

Nos últimos anos, vários esforços têm sido feitos através de políticas públicas de educação, no sentido de melhorar o ensino e a aprendizagem matemática: Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) e Base Nacional Comum Curricula (BNCC), são alguns exemplos.

Entendo que as reformas educacionais, em nosso país, sempre foram fixadas tardiamente em relação às reais necessidades dos sistemas de ensino, embora as últimas Constituições promulgadas fizessem referência direta e clara às questões da educação, cultura e esporte.

Feitas estas considerações a respeito da formação inicial do professor que ensina matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, isto é, nos primeiros anos da educação básica, do percurso histórico e da legislação educacional, passo a refletir sobre as perspectivas futuras de políticas públicas de educação no Brasil, dentro do que preconiza o atual Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecido através da Lei Federal nº 13.005, de 25 de junho de 2014.

O PNE estabeleceu um conjunto de vinte metas para melhorias na educação, a ser cumpridas em um período de dez anos, portanto, até o ano de 2024. Ficou evidente,

no novo PNE, que existe um olhar das políticas públicas de educação para a formação de professores, sobretudo no que diz respeito às áreas de ciências e matemática. É o que está estabelecido na Estratégia 12.4, da Meta 12 do PNE:

Como referência internacional em aprendizagem matemática para os alunos da educação básica, o PNE utiliza o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). E determina na Meta 7, Estratégia 7.11:

> Melhorar o desempenho dos alunos da educação básica nas avaliações da aprendizagem no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, tomado como instrumento externo de referência, internacionalmente reconhecido, de acordo com as seguintes projeções:

PISA	2015	2018	2021
Média dos resultados em matemática, leitura e ciências.	438	455	473

Quadro 1 – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Lei Federal nº 13.005, de 25 de junho de 2014.

Ressalto que a execução dessas metas vincula-se, estreitamente, à necessidade de regulamentação das políticas a serem implantadas.

Entendo que, nas últimas duas décadas, o Brasil fez uma travessia no campo educacional onde conseguiu levar as crianças, na idade considerada pedagogicamente adequada, para as escolas. Entretanto, não conseguiu um plano estratégico de governo que garantisse uma formação considerada de qualidade dentro dos padrões internacionais, para o docente que atua nos anos iniciais do ensino fundamental.

O padrão internacional de qualidade que o Brasil se espelha é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), citado no PNE e referenciado anteriormente.

O rápido aumento da população escolar, especificamente de crianças de seis a dez anos, quase que exigiu dos sistemas de ensino um recrutamento em massa de professores com baixa qualificação. Delors (2003, p. 157 e 158), afirma:

> Este recrutamento teve de fazer-se, muitas vezes, com recursos financeiros limitados e nem sempre foi possível encontrar candidatos qualificados. A falta de financiamento e de meios pedagógicos, assim como a superlotação das turmas traduziram-se, frequentemente, numa profunda degradação das condições de trabalho dos professores.

D'Ambrosio (2011, p. 24), refletindo a respeito do papel do educador numa sociedade em transição e olhando para o futuro das crianças, nos pergunta:

> Como age o professor, que é um agente da sociedade com a responsabilidade de preparar as gerações para a vida futura? É importante lembrar que a ação do professor, e dos sistemas educacionais em geral, mostrará seus efeitos somente no futuro. Um futuro que ninguém conhece. Um futuro no qual

estarão agindo as crianças que hoje a sociedade confia a nós, educadores.

Nunca é demasiado insistir na importância da qualidade da formação inicial do professor que atua nos anos iniciais da educação básica**.** Entendo que, quanto maiores as dificuldades que o aluno tiver que ultrapassar, no que diz respeito à pobreza, discriminação no meio social, situação familiar difícil, doenças físicas, mais se exigirá da formação do professor.

A minha atuação como profissional da educação, seja na docência, na gestão ou no campo da pesquisa acadêmica, nos últimos anos, me permite compreender que não é fácil estabelecer políticas públicas para qualquer área que seja em um país com as dimensões continentais como é o Brasil.

3 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo e os meus posicionamentos feitos ao longo deste trabalho, o propósito foi identificar, a partir do conhecimento histórico, do estudo da legislação e das políticas públicas, como a formação inicial do pedagogo contemplou a formação para ensinar matemáticaCom o estudo e os meus posicionamentos feitos ao longo deste trabalho, o propósito foi identificar, a partir do conhecimento histórico, do estudo da legislação e das políticas públicas, como a formação inicial do pedagogo contemplou a formação para ensinar matemática.

Investiguei indícios que me permitiram identificar quais eram e como foram tratados os conhecimentos de conteúdos matemáticos na formação de professores para ensinar matemática para os anos iniciais do ensino fundamental.

Assim, vou assumir pressupostos teóricos, que me permitem fazer as seguintes indicações teóricas a respeito da formação inicial de professores para ensinar matemática nos cinco primeiros anos do ensino fundamental:

1. Conhecer o processo histórico sobre a formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais da educação básica.

2. Compreender o formato do ensino de matemática proposto pelo poder público brasileiro.

3. Especificar o conteúdo de matemática na legislação que orienta o curso inicial de formação de professores para os anos iniciais da eduacação básica.

4. Expandir, durante o treinamento de graduação, o foco no conhecimento teórico e na prática docente das disciplinas que abordam a metodologia e o conteúdo matemático.

5. Aumentar a conscientização sobre a possibilidade de trabalhar com projetos, deixando o paradigma do exercício, dentro de uma concepção de educação matemática crítica.

6. Focar em conhecimento matemático significativo, isto é, com aplicação para o

dia a dia.

Entretanto, este estudo não pretende ser nenhum documento conclusivo a respeito da formação inicial do pedagogo, mais especificamente, da formação de professor para ensinar matemática nos anos iniciais da educação básica no Brasil.

REFERÊNCIAS

ALROE, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogos e aprendizagem em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BAUMANN, Ana Paula Purcina. **Características da formação de professores de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental com foco nos cursos de pedagogia e matemática.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, SP: Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2009. 241p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação para uma sociedade em transição.** 2. ed. Natal, RN: EDUFRN, 2011.

DELORS, Jacques (org.). **Educação: um tesouro a descobrir**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2003.

BRASIL. Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa as diretrizes e bases para o ensino de primeiro e segundo graus e dá outras providências. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil.** Brasília: DOFC PUB 12/08/1971 006377 1.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília, 05/10/1988.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Fixa as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil.** Brasília: DOFC PUB 23/12/1996 02783 1.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Volume 3, Matemática. Brasília: **Ministério da Educação e do Desporto.** Secretaria de Educação Fundamental, 1997.1.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de Graduação em Pedagogia. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 1/2006. Brasília: **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília: 16/05/2006, Seção 1, p. 11.

BRASIL. Lei Federal nº 11.274, 6 de fevereiro de 2006. Altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, ampliando a duração do ensino fundamental de oito para nove anos. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília, 07/02/2006.

BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Brasília: **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, 26/06/2014.

CURI, Edda. A formação Inicial de Professores para Ensinar Matemática: Algumas Reflexões, Desafios e Perspectivas**.** In: **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Ano 6, n. 9 (jul./dez. 2011). Natal, RN: EDUFRN, 2011.

_____. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa Editora, 2005.

DELORS, Jacques (org.). **Educação: um tesouro a descobrir**. 8.ed. São Paulo: Cortez, 2003.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 48. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2014.

FUSARI, José Carlos. **A formação continuada de professores no cotidiano da escola fundamental**. São Paulo: FDE/SEE, 1992. p. 24-34. (Série Ideias, 12.)

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** 1. reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.** Campinas, SP: Papirus, 2008.

_____. **Educação matemática Crítica:** a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

CAPÍTULO 2

O CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO E OS DIÁLOGOS INTERDISCIPLINARES DO COMPONENTE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NA REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

Data de aceite: 01/03/2022

Alexandre Souza de Oliveira
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP
Universidade Nove de Julho – UNINOVE
São Paulo – SP
http://lattes.cnpq.br/4699659431065247

RESUMO: Este texto tem por objetivo trazer resultados parciais, de cunho bibliográfico, de uma pesquisa que analisa os elementos que configuram a proposta educacional libertadora a tratar das questões sobre o percurso do currículo na perspectiva crítico-emancipatória da Rede Municipal de Ensino (RME) de São Paulo, que aborda uma coletiva de documentos que pautam os direitos de aprendizagem para os diferentes componentes curriculares, entre eles, a Matemática. Busca, ainda, de forma breve, a trajetória de formação percorrida pela Secretaria Municipal de Educação (SME), com a intencionalidade de estudar os diálogos interdisciplinares do componente curricular de matemática. Apontamos o desafio de alcançar o nível de compreensão ético-político, ou seja, quando estrutura e superestrutura são vistas interligadas, reconhecidas historicamente. Assim, é necessário pensar a formação docente tendo como princípios a escuta e o diálogo, bem como de romper com uma visão curricular reprodutora de desigualdades, a fim de promover propostas de um currículo que apresente a matemática como instrumento de leitura crítica sobre o mundo. O trabalho é fruto de reflexões de diferentes pesquisas que têm como objeto a relação teoria e prática na formação de professores.

PALAVRAS-CHAVE: Currículo Crítico-Emancipatório; Direitos de Aprendizagem; Formação de Professores, Políticas Públicas.

THE CRITICAL-EMANCIPATORY CURRICULUM AND THE INTERDISCIPLINARY DIALOGUES OF THE MATHEMATICS CURRICULUM COMPONENT IN THE REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO

ABSTRACT: This text aims to bring partial results, of a bibliographic nature, of a research that analyzes the elements that make up the liberating educational proposal to deal with questions about the course of the curriculum in the critical-emancipatory perspective of the Rede Municipal de Ensino (RME) of São Paulo, who addresses a collection of documents that guide learning rights for different curriculum components, including Mathematics. It also seeks, briefly, the training trajectory followed by the Secretaria Municipal de Educação (SME), with the intention of studying the interdisciplinary dialogues of the curricular component of mathematics. We point to the challenge of reaching the level of ethical-political understanding, that is, when structure and superstructure are seen as interconnected, historically recognized. Thus, it is necessary to think about teacher education having as principles listening and dialogue, as well as breaking with a curricular vision that reproduces inequalities, in order to promote proposals for a curriculum that presents mathematics as an instrument for

critical reading of the world. The work is the result of reflections from different researches that have as their object the relationship between theory and practice in teacher education.
KEYWORDS: Critical-Emancipatory Curriculum; Learning Rights; Teacher Training, Public Policy.

1 I INTRODUÇÃO

As discussões no campo do currículo, cada vez mais, são ampliadas e aprofundadas, superando a concepção restrita e fragmentada, passando ele a ser visto como instrumento de ação política e pedagógica. Vivemos um momento histórico marcado por múltiplas manifestações, diferentes modos de ver o mundo, relações estabelecidas que precisam ser questionadas, problematizadas, aprofundadas e sistematizadas para construir relações sociais solidárias, com vista à justiça social. Assim, a compreensão de significados culturais constitui-se emento indispensável, neste sentido durante o estudo e processo de sistematização, para facilitar a compreensão crítica, buscamos possibilidades de novos posicionamentos frente à ciência da educação. Constantemente instigamos o diálogo com os autores estudados, apropriando de muitas de suas reflexões a fim de ampliar a compreensão crítica sobre a temática da emancipação e a problemática da relação entre educação, política e currículo, e em especial, de matemática.

Realizamos um estudo bibliográfico, cujo objetivo é trazer resultados parciais de uma pesquisa que abordará o percurso de formação continuada de professores da Rede Municipal de Ensino (RME) de São Paulo, que se iniciou desde a implantação do *Programa Mais Educação São Paulo* (2014) e se desdobrou na construção coletiva de documentos que pautam os direitos de aprendizagem para os diferentes componentes curriculares, entre eles, a Matemática, cujo processo formativo e o texto curricular resultante dele será o objeto de análise de nossa pesquisa.

O Programa Mais Educação São Paulo trouxe mudanças significativas para a RME, entre elas, a perspectiva do *currículo crítico-emancipatório*, o que nos apontou a necessidade, no âmbito desta pesquisa, de nos debruçarmos sobre as noções teóricas que norteiam esta concepção curricular.

O currículo do Ciclo de Alfabetização da RME (1º, 2º e 3º anos do ensino fundamental) se pauta no documento *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização do Ensino Fundamental*, produzido pelo Ministério da Educação – MEC (BRASIL, 2012), e está vinculado à política do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), que promove a formação dos professores alfabetizadores das redes públicas que aderem ao programa. Este documento traz, em seu texto, considerações sobre o currículo do ciclo de alfabetização na perspectiva dos direitos de aprendizagem, constituindo-se em uma importante referência para as ações da Secretaria Municipal de Educação (SME) para os demais ciclos - Ciclo Interdisciplinar

(4º, 5º e 6º anos) e Ciclo Autoral (7º, 8º e 9º anos).

A ideia dos direitos de aprendizagem está ligada ao direito à educação - direito social de 2ª geração (BOBBIO, 1992) - o que nos faz pensar sobre o significado da educação no mundo contemporâneo e a função social da escola nesta sociedade complexa em que vivemos.

Como os direitos de aprendizagem do ciclo de alfabetização já estão delineados pela política do PNAIC, a SME teve diante de si a tarefa de construir os direitos de aprendizagem para os ciclos interdisciplinar e autoral, e a escolha adotada foi a de enveredá-la, de forma participativa e reflexiva, *com* os educadores da RME. A proposta de trabalho, então apresentada, foi a de uma construção conjunta com a rede, numa relação dialógica, de síntese e produção coletiva.

Neste processo iniciado em 2014, os primeiros passos adotados pela SME apontaram para a necessidade de uma discussão mais ampla e formativa sobre a perspectiva do currículo crítico-emancipatório, que é um dos princípios do Programa Mais Educação. Abordaremos alguns aspectos sobre esta noção teórica e, em seguida, a concepção de professor como intelectual transformador, adotada pela SME e importante para análise deste processo.

Este artigo, portanto, trará uma síntese da pesquisa sobre estes conceitos, necessários para o entendimento da proposta curricular da RME de São Paulo. Para finalizar, traremos, de forma breve, a trajetória de formação percorrida pela SME, que culminou na escrita coletiva de documentos curriculares.

2 | DIÁLOGO: PRINCÍPIO E FUNDAMENTO DO CURRÍCULO CRÍTICO-EMANCIPATÓRIO

Recorrendo, inicialmente, a Paulo Freire (1996; 2005), buscamos o diálogo com o conhecimento na caminhada que nos propusemos nesta pesquisa que se impõe como forma de significação existencial, já que entendemos que o conhecimento não é solitário e que precisa do diálogo, permeado pelo conflito, para fugir de considerações ingênuas. Por isso, estamos referindo-nos ao diálogo como o caminho para a significação existencial, encontro entre o refletir e o agir no mundo e para o mundo, para a humanização/emancipação, para a transformação da realidade.

De acordo com Menezes e Santiago (2014) as ideias que fundamentam o currículo crítico-emancipatório tiveram início nos anos de 1970, nos Estados Unidos, com o movimento de “reconceptualização do currículo”, originado na rejeição do caráter prescritivo e no reconhecimento do caráter político do pensamento e da prática curricular.

Os teóricos da Escola de Frankfurt desenvolveram uma teoria que procurou desvelar e romper com as estruturas opressivas, objetivando contribuir para a emancipação humana e com a mudança social, na medida em que realiza uma análise crítica das relações

sociais, superando os ditames da racionalidade positivista que sujeitava a consciência e as ações humanas ao imperativo de leis universais. Seus representantes argumentavam a favor do pensamento dialético, como pensamento crítico que supera a ideia positivista de neutralidade e se posiciona a favor da luta por um mundo melhor. Segundo Giroux (1986), a Escola de Frankfurt, ao fundamentar o seu trabalho na crítica ao pensamento positivista, constrói uma teoria que tem implicações importantes para os teóricos que são críticos das teorias tradicionais da educação. De acordo com o autor, a teoria social desenvolvida pela Escola de Frankfurt contribui para compreender questões que envolvem o currículo em uma perspectiva emancipatória.

Nesse contexto de reconceptualização da teorização curricular, buscou-se superar os fundamentos das teorias tradicionais, caracterizadas pela aceitação, pelo ajuste e pela adaptação na sociedade vigente, e construir uma teoria crítica do currículo, pautada no questionamento e na modificação dessa sociedade.

Saul (1998), ao discutir o currículo na perspectiva crítica, afirma que o pensamento de Paulo Freire constitui uma matriz importante, que fundamenta o paradigma curricular de racionalidade crítico-emancipatória. Por isso, defendemos um processo formativo emancipador que, voltado à libertação das amarras da opressão, da alienação, da conformação e de qualquer forma de degradação humana, possibilite aos professores a consciência dos limites e possibilidades da realidade, assim como a consciência de si e do outro como sujeitos (históricos, políticos, sociais e culturais) de uma práxis transformadora, individual e coletiva. Vale ressaltar que se trata de uma concepção de educação que não vê os professores como destinatários de teorias ou de programas de educação, mas como sujeitos de sua humanização, que provoca uma reação pela humanidade roubada à resistência por recuperá-la.

Currículo, neste texto, é tomado como o conjunto das experiências que têm como objetivo a aprendizagem e às quais os educandos estão expostos. A partir dessa observação, é possível identificar o currículo como histórica e socialmente situado, como um recorte seletivo de cultura (SACRISTÁN, 2000; MOREIRA e CANDAU, 2008).

Reconhecendo, neste sentido, o currículo como um território em constante disputa, podemos afirmar que a atual forma da organização curricular da maioria das escolas ainda está próxima de uma concepção com objetivos contraditórios a uma educação emancipadora.

O olhar crítico sobre a realidade é condição necessária, mas não suficiente, para sua transformação. Desse modo, quanto mais se associam as demandas do mundo contemporâneo ao papel da educação pública, bem como às práticas pedagógicas nela inseridas, mais clareza haverá de que a escola pode e deve ser um espaço de socialização de cultura e de práticas sociais mais democráticas.

A dimensão política presente na ação educativa permite captar melhor as posições de alienação ou emancipação que podem permear a prática pedagógica. É impossível

pensar o fenômeno educativo com neutralidade, desconsiderando o contexto histórico, político, econômico, social e cultural em que ele se desenvolve. Nesse caso, corre-se o risco de considerar a educação e o trabalho docente a partir de uma concepção de reprodução, tomando o educador como mero executor de propostas curriculares, e não de transformador ou sujeito que pode intervir na realidade.

Neste sentido, os direitos de aprendizagem em Matemática, como dos demais componentes curriculares, precisam ser orientados para promover o desenvolvimento integral do educando, prezando pela liberdade e convívio social, e o conhecimento matemático como possibilidade de repensar o processo social de modo a não reproduzir a desigualdade. Este é, sem dúvida, um dos grandes desafios da Educação Matemática na contemporaneidade.

Nessa direção, docentes-discentes carregam a possibilidade de compreender suas relações com o mundo, não mais como realidade estática, mas como realidade em transformação, em processo; assim, são estimulados a enfrentar a realidade como sujeitos da práxis, da reflexão e da ação verdadeiramente transformadora da realidade.

Deste modo, podemos considerar que o currículo se efetiva no interior de cada unidade escolar, nas trocas promovidas entre educadores e educandos, tomando por base o projeto de educação e de sujeito que se pretende formar, que as escolas desenvolvem para os estudantes e com eles, por meio do Projeto Político-Pedagógico (PPP), com os elementos que a comunidade escolar entende ou considera como os mais adequados. (SACRISTÁN, 2013).

Pelos motivos elencados, a construção do currículo numa perspectiva crítica-emancipatória foi adotada para a RME, considerando que seu público-alvo é representado, em sua maioria, pelas camadas populares que possuem na educação pública o principal caminho para a leitura de mundo.

Sob esta perspectiva curricular, é imprescindível que o educador matemático conheça quem são as crianças, jovens, adultos e seus familiares, bem como suas reais necessidades. Em se tratando dos educandos do ciclo interdisciplinar, cabe lembrar, especificamente, que se trata de crianças na faixa etária compreendida entre oito anos completos e 11 anos completos.

Assim, no contexto de uma proposta de um currículo crítico-emancipatório, envolve compreender os estudantes deste ciclo como crianças produtoras de culturas. Esta questão aproxima tal proposta curricular das considerações teóricas de D'Ambrósio (2002, p. 9), quando define a etnomatemática como sendo a matemática praticada por grupos culturais, entre eles, crianças de certa faixa etária.

É nessa complexa dinâmica de encontro entre as culturas das crianças e a cultura escolar dos educadores que se pode reconhecer que o conhecimento matemático que os primeiros trazem não é de ordem inferior ao conhecimento matemático dos segundos. "Ao contrário, trata-se de um conhecimento autoral – situado em determinada realidade, em

ambientes específicos e ricos em potencial de curiosidade epistemológica" (SÃO PAULO, 2015, p. 26).

O currículo crítico-emancipatório parte do cotidiano do educando, mas não se esgota em si mesmo, pois também considera a ampliação do acesso aos bens culturais e ao conhecimento, para todas as pessoas e a serviço da diversidade. Tal projeto educacional era o defendido por Paulo Freire, no qual a educação deve proporcionar um diálogo crítico entre as diversas culturas, com o objetivo de ampliar e consolidar os processos de exercício da liberdade (FREIRE, 2014). A efetivação de um currículo crítico-emancipatório só é possível pelo exercício do *diálogo* e da *reflexão crítica sobre a prática*.

3 | O PAPEL DO PROFESSOR COMO INTELECUTAL TRANSFORMADOR

Para a elaboração e implantação de um currículo para a emancipação dos sujeitos pressupõe a atuação de educadores críticos. Reconhecemos, neste cenário, o papel da formação docente, dado que a docência por vezes se apresenta como um exercício solitário, permeado de desafios e dilemas. É necessário refletir sobre esses dilemas e atribuir-lhes novos sentidos. Portanto, qualquer tentativa de reorganização curricular deve necessariamente passar pelo diálogo e debate junto aos educadores.

Assim sendo, as pessoas em situação de fala-escuta assumem posição de reciprocidade: quem fala quer ser ouvido, compreendido, respeitado; quem escuta também quer ter sua oportunidade de falar com as mesmas condições e iguais direitos. Essas situações ampliam as competências comunicativas necessárias para a convivência democrática na sociedade contemporânea, as situações pedagógicas, e qualifica a relação docente-discente, pois o diálogo implica ausência do autoritarismo e, ao mesmo tempo, modos de lidar com a tensão permanente entre a autoridade e a liberdade.

Giroux (1997) aponta como tendência reduzir os professores ao status de técnicos especializados dentro da burocracia escolar, cuja função se limita a implementar programas curriculares, mais do que desenvolver ou apropriar-se criticamente de currículos que satisfaçam objetivos pedagógicos específicos. Devido ao enfraquecimento da carreira e da profissionalidade docente que isto pode gerar, defende que os professores sejam considerados intelectuais transformadores, que combinam reflexão e prática acadêmica a serviço dos educandos.

Como intelectual transformador, o professor detém uma função social relevante, pois é, principalmente, a partir de sua intencionalidade que diferentes saberes podem ser construídos, potencializados e compartilhados.

A escolha do conteúdo programático é uma das preocupações que permeiam as discussões no campo do currículo e também nas políticas públicas. Paulo Freire (2005) destaca a impossibilidade de existir uma prática educativa sem conteúdo, ou seja, sem objeto do conhecimento, e justifica, afirmando que a prática educativa é naturalmente

gnosiológica. É importante que o ensino dos conteúdos esteja associado a uma leitura crítica da realidade que desvele a razão dos inúmeros problemas sociais. A escolha do conteúdo programático é de natureza política, pois "[...] tem que ver com: que conteúdos ensinar, a quem, a favor de quê, de quem, contra quê, contra quem, como ensinar. Tem que ver com quem decide sobre que conteúdos ensinar" (Freire, 2005, p. 45).

Sabemos que a formação inicial acontece com base nos currículos das universidades, muitas vezes ainda pautados nos paradigmas da racionalidade técnica e descolados da realidade das escolas públicas. A constante formação continuada constitui-se como exigência diante dos desafios trazidos pelas práticas escolares. A formação ao longo da vida é condição primeira para o desenvolvimento profissional e para nos constituirmos em intelectuais transformadores.

Tal postura transformadora remete ao exercício da escuta, do diálogo e da reflexão sensíveis às realidades das crianças e jovens, e requer uma prática docente crítica, que envolve o movimento dinâmico e dialético entre o fazer e o pensar sobre o fazer. É por isso que, na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática.

No processo de formação contínua de professores implementado a partir do Programa Mais Educação São Paulo, a SME tomou a decisão de encarar seus educadores como intelectuais transformadores, na medida em que dividiu as responsabilidades em fazer o levantamento de questões acerca do que ensinam, porque ensinam, como ensinam, e quais os direitos cada componente curricular deve contemplar nos ciclos de aprendizagem. Isto significou assumir junto com os professores o papel de indicar caminhos sobre os propósitos da educação municipal.

Apontamos, assim, a impossibilidade de formar educandos para a emancipação, se não apostarmos na formação de educadores que se assumam como intelectuais transformadores de sua prática, detentores de um discurso da crítica, mas também da possibilidade, como atores sociais capazes de promover mudanças.

Assim, é papel da escola proporcionar condições pedagógicas para que os sujeitos aprendam a pensar a sua condição social, a sociedade, o mundo. Perceber-se como sujeito histórico, capaz de decifrar o mundo em que se encontra inserido. Vê-se, então, que "decifrar o mundo significa que o acesso à realidade é problemático, que é preciso ir além das aparências, atrás das máscaras e das ilusões" (GADOTTI, 1980, p. 40). As práticas pedagógicas libertadoras privilegiam a reflexão crítica, ancorada na práxis, com perspectivas dialéticas, para ensinar a pensar o mundo complexamente. Desta forma, criam condições para perceber as diversas dimensões que envolvem a vida social, qual seja, o econômico, o cultural o político; o individual e o coletivo; o objetivo e o subjetivo; o ético e o moral.

4 | A PRODUÇÃO DOS DOCUMENTOS CURRICULARES

Desde a implantação do Programa Mais Educação São Paulo, SME iniciou um intenso processo de debate sobre currículo. Deparamo-nos, com um cenário de projetos em disputa, em que a educação é, ao mesmo tempo, mediadora do projeto hegemônico, mas se constitui, também, enquanto caminho para a construção de um projeto de contra hegemonia que atenda aos interesses da maioria, ou seja, que atenda à emancipação. Nossa exposição se deu no sentido de empreender uma jornada que nos mostrasse os caminhos percorridos e as possibilidades que nos são apresentadas para novos percursos.

Como primeira ação de formação, foram realizados, entre setembro e novembro de 2014, dentro da jornada de trabalho dos educadores, os *Encontros Regionais para a Construção dos Direitos de Aprendizagem do Ciclo Interdisciplinar*, envolvendo professores de todos os componentes curriculares, coordenadores pedagógicos e supervisores escolares das treze Diretorias Regionais de Educação (DREs). Os encontros pautaram-se na discussão do documento-base, um texto em discussão, que contou com importantes intervenções dos participantes dos Encontros Regionais.

O *I Seminário Municipal de Educação para a Construção dos Direitos de Aprendizagem* foi organizado, em dezembro de 2014, a partir da sistematização das contribuições dos Encontros Regionais. A partir deste seminário, um grupo de trabalho – responsável pela finalização do documento – reuniu-se, periodicamente, para acolher as contribuições em um processo de reescrita, que culminou, em 2015, na publicação do documento *Diálogos interdisciplinares a caminho da autoria: elementos conceituais e metodológicos para a construção dos direitos de aprendizagem do Ciclo Interdisciplinar* (SÃO PAULO, 2015).

Consideramos este documento um marco para a RME por dois aspectos: por ser fruto de uma escrita a muitas mãos, decorrente de um processo de consulta e diálogo com professores da rede; e por se constituir em um importante objeto de formação para as DREs durante o ano de 2015, constituindo-se no que a SME considerou, naquele momento, como temáticas que deveriam ser amplamente discutidas, problematizadas e ressignificadas nas ações de formação da rede. Entre estas temáticas, destacamos *Currículo*, *Ciclos*, *Interdisciplinaridade* e *Avaliação*.

O movimento de formação com educadores da rede após a publicação de *Diálogos*, em horário de trabalho, e com a finalidade de atingir o maior número possível de educadores, só foi possível com a constituição de um grupo que chamamos de *Formadores Parceiros*, formado por educadores atuantes nas salas de aula das escolas que compuseram, junto com as equipes de formadores das DREs, o grupo de formadores responsáveis por este processo de escuta e diálogo.

A estes formadores parceiros, juntamente com as equipes de formadores das DREs e à medida que acompanharam as ações locais de formação, foi lançado o desafio de

dar continuidade ao processo de construção coletiva dos documentos de SME, desta vez, dos documentos de cada componente curricular, pautados na perspectiva dos direitos de aprendizagem e da interdisciplinaridade. Foram considerados como intelectuais transformadores.

O grupo de formadores, em conjunto com a equipe de assessores externos contratados pela SME (que chamamos de GT de escrita), elaborou, de forma articulada e coletiva, durante o 2º semestre de 2015, a escrita da versão preliminar dos documentos dos diferentes componentes curriculares. Estes documentos foram divulgados à RME em fevereiro de 2016, momento em que ocorreram Seminários locais nas treze DREs.

Nos meses de março e abril de 2016, o GT de escrita acolheu, por meio de encontros formativos organizados nas DREs, as contribuições aos documentos feitas por professores de todas as regiões da cidade. No mês de maio, o GT de escrita voltou a se reunir na SME a fim de se debruçar sobre todas as contribuições dos professores, reformulando a escrita e considerando os aspectos apontados. Aos educadores da RME foi dada a possibilidade da escuta, do diálogo e da construção coletiva, uma vez que podiam fazer contribuições à escrita do texto.

O processo culminou na escrita final dos documentos, um para cada componente curricular. Especificamente sobre o documento *Diálogos Interdisciplinares a Caminho da Autoria: Componente Curricular Matemática* (SÃO PAULO, 2016) ressaltamos que se estrutura da seguinte forma: Apresentação; Histórico; Concepção (do componente curricular); Matemática e Currículo; Direitos de Aprendizagem para os Ciclos Interdisciplinar e Autoral ; e Estratégias e Ações.

Nossa pesquisa irá detalhar e analisar de forma mais aprofundada, futuramente, o processo formativo empreendido pelo GT de escrita de Matemática. Estamos, neste momento, em fase de formulação dos instrumentos de coleta de dados para a análise que pretendemos realizar. Temos, por hipótese, a convicção de que a experiência compartilhada pelos educadores da RME, em especial aquela vivenciada pelos professores que atuaram no GT de escrita de Matemática como formadores parceiros, pode trazer contribuições ao campo da formação de professores que ensinam matemática, bem como à formulação de políticas públicas de formação continuada de professores empreendidas pelos diferentes sistemas de ensino.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste texto procuramos evidenciar que o pensamento político-pedagógico deve estar sempre em movimento e dialoga com diferentes questões contemporâneas. Traz elementos norteadores para a construção da teoria curricular emancipatória e eticamente comprometida com a humanização dos sujeitos. Assim, a análise dos elementos que configuram a proposta educacional libertadora e a categoria diálogo, uma categoria fundante

do pensar freireano, pode contribuir para a construção dos processos de formulação de políticas e práticas curriculares ancorados em princípios democráticos que possibilitam o processo participativo dos sujeitos reconhecendo suas relações.

Pensar a formação docente tendo como princípios a escuta e o diálogo, e a elaboração de documentos curriculares por meio da construção coletiva, não é iniciativa inédita na RME. Ao contrário, traz consigo uma história de lutas e significados.

Paulo Freire atribui à Educação o papel de contribuir para o processo de transformação social, pois, para ele, a educação é dialógico-dialética, na medida em que o ato educativo pode superar a prática de dominação e construir uma prática da liberdade em que educador(a) e educando(a) são os protagonistas do processo, dialogam e constroem o conhecimento mediante a análise crítica das relações entre os sujeitos e o mundo. Esse movimento decorre da compreensão da Educação como ato de conhecimento e como ato político.

Tendo Paulo Freire como Secretário de Educação (1989-1992), a RME presenciou a elaboração de um currículo que se constituiu coletivamente, a partir das premissas que atendessem às especificidades da comunidade escolar. O diálogo, a problematização da realidade e a reflexão eram etapas imprescindíveis da elaboração de tal currículo, com vistas à criação coletiva de novas possibilidades de propostas na definição dos PPPs das escolas. Exemplo de como este processo se desdobrou foi a elaboração dos chamados Cadernos de Visão de Área (SÃO PAULO, 1992), como orientações curriculares produzidas coletivamente e que já apresentavam, naquela época, uma perspectiva interdisciplinar e emancipatória do currículo.

Retomar a discussão sobre a função social da escola, pautada na perspectiva dos direitos de aprendizagem, inclui, como requisito básico, enxergar os educandos como sujeitos de direitos. Envolve repensar o papel da escola pública atualmente, em especial quando nos referimos a uma rede de ensino única, complexa e rica como a rede municipal de São Paulo, com suas contradições e possibilidades. O espaço da escola pública é, sem dúvida, um dos principais na garantia dos direitos de nossas crianças, adolescentes, jovens e adultos. Em especial, a garantia aos seus direitos de aprendizagem.

Neste sentido, nós, educadores matemáticos, temos este desafio diante de nós: romper com uma visão curricular reprodutora de desigualdades, a fim de promover propostas de um currículo que apresente a matemática e os direitos de aprendizagem em matemática como instrumento de leitura crítica sobre o mundo.

Pretendemos continuar a pesquisa, mas se isto não acontecer mesmo assim continuaremos escrevendo e publicando sobre o tema. Contudo, não apenas temos a preocupação acadêmica, nosso compromisso é com a luta de transformação da escola, no ponto de vista das práticas pedagógicas e contribuir para criar condições para que ela venha ser coadjuvante no processo de intervenção histórica nas condições de existência das camadas subalternas. A partir da percepção epistemológica e visão política da

educação, como prática libertadora, pretendemos ajudar a construir maneiras pedagógicas para configurar novos modos de configurar o conhecimento. Em face de tal concepção, questionando pressupostos e objetivos da educação, e também no sentido geral. Assim, estaremos sempre procurando incrementar o repertório de experiências das demandas existenciais (prática) e científica (teórica), como espaço de oportunidade de crescimento intelectual.

Diante disso, ressaltamos que, chegando ao "sótão da casa" (VEIGA-NETO, 2012) nos processos formativos e na pesquisa educacional acerca da formação docente, continuemos a nos questionar: sobre quais princípios e valores se sustentam as concepções e práticas educativas/formativas? Qual sua concepção de sujeito? Para qual projeto de sociedade? Quais os fins que pretendem alcançar? As bases epistemológicas fundantes das concepções de formação de professores partem de uma concepção de emancipação humana? Se a educação tem a função essencial de formação humana, vale, portanto perguntar, que humanidade se quer construir? Percorramos toda a casa! Continuemos o diálogo!

REFERÊNCIAS

BOBBIO, Norberto. *A era dos direitos*, 11ª. ed., Rio de Janeiro, Campus, 1992.

BRASIL, *Pacto Nacional pela Alfabetização na idade certa*, Cadernos, Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de apoio à Gestão Educacional, 2014 e 2015.

BRASIL, Ministério da Educação, DICEI/COEF, *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º, 3º anos) do Ensino Fundamental,* Brasília, MEC, 2012.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, Paulo. *A educação na cidade.* 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005. 144 p.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido.* (57a ed.). Rio de Janeiro, São Paulo: Paz e Terra, 2014.

GIROUX, Henry A. *Os professores como intelectuais:* rumo a uma pedagogia crítica da aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

MOREIRA, Antonio F. B. e CANDAU, Vera M. *Indagações sobre o currículo:* currículo, conhecimento e cultura. Brasília: MEC/SEB, 2008.

SACRISTÁN, José G. *Currículo:* uma reflexão sobre a prática. trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SACRISTÁN, José G. O que significa currículo? In: GIMENO SACRISTÁN, J. (Org.) *Saberes e incertezas sobre o currículo.* Porto Alegre: Penso, 2013.

SÃO PAULO (SP). *Cadernos de Visões de Área*. São Paulo: SME, 1992

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação, Diretoria de Orientação Técnica, *Programa Mais Educação São Paulo: subsídios para a implantação*/São Paulo, SME/DOT, 2014.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica, *Diálogos interdisciplinares a caminho da autoria*: elementos conceituais e metodológicos para a construção dos direitos de aprendizagem do Ciclo Interdisciplinar/São Paulo, SME/DOT, 2015.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica, *Diálogos Interdisciplinares a Caminho da Autoria:* Componente Curricular Matemática /São Paulo, SME/DOT, 2015.

VEIGA-NETO, Alfredo. *É preciso ir aos porões.* Revista Brasileira de Educação. v.17 n.50 maio-ago. 2012. p.267-282.

CAPÍTULO 3

RECOMMENDATIONS ABOUT THE BIG IDEAS IN STATISTICS EDUCATION: A RETROSPECTIVE FROM CURRICULUM AND RESEARCH

Data de aceite: 01/03/2022

J. Michael Shaughnessy
Portland State University

ABSTRACT: Five decades of research and curriculum development on the teaching and learning of statistics have produced many recommendations from both researchers and national organizations on the statistical education of our students. Within the last ten years work by both statisticians and statistics educators has focused on a collection of big ideas that are the most important concepts and processes to develop the statistical thinking of our students, our work force, and the lifelong statistical literacy of our citizens. In this paper I look back at the roots of big ideas in statistics education and identify what I believe are the two most important overarching ideas for the statistical education of our students as they progress from the elementary years into tertiary. The paper discusses research on student thinking about big ideas in statistics and presents recommendations for the future of teaching and research in statistics education.
KEYWORDS Statistics education, distribution, inference, variability, expectation, sampling, statistical investigation processes.

RESUMO: Cinco décadas de pesquisa e desenvolvimento curricular sobre o ensino e aprendizagem de estatística produziram muitas recomendações de pesquisadores e organizações nacionais sobre a educação estatística de nossos alunos. Nos últimos dez anos, o trabalho de estatísticos e educadores estatísticos concentrou-se em uma coleção de grandes ideias que são os conceitos e processos mais importantes para desenvolver o pensamento estatístico de nossos alunos, nossa força de trabalho e a alfabetização estatística ao longo da vida de nossos cidadãos. Neste artigo, olho para as raízes das grandes ideias na educação estatística e identifico o que acredito serem as duas ideias abrangentes mais importantes para a educação estatística de nossos alunos à medida que avançam dos anos elementares para o ensino superior. O artigo discute pesquisas sobre o pensamento dos alunos sobre grandes ideias em estatística e apresenta recomendações para o futuro do ensino e da pesquisa no ensino de estatística.
PALAVRAS-CHAVE: Educação estatística, distribuição, inferência, variabilidade, expectativa, amostragem, processos de investigação estatística

INTRODUCTION

Curriculum and Practice

Prior to the 1960's there was almost no statistics included in the school curricula of many nations of the world. In their review What is Statistics Education? Zeiffler, Garfield, and Fry (2018) point to early recommendations from the 1960's in which several curriculum projects in the UK recommended the inclusion of probability and statistics in schools for students ages 11 –

16. In 1967 the American Statistical Association (ASA) and the National Council of Teachers of Mathematics created the Joint Committee on the Curriculum in Statistics and Probability in the U.S. and Canada. In the early 1970's the Joint Committee spearheaded the publication of some of the first materials for teaching statistics in schools, such as *Statistics: A Guide to the Unknown* (Tanur, Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1972), and *Statistics by Example* (Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1973). To this day the Joint Committee continues to sponsor and promote statistics education and the professional development of teachers with curriculum materials such as *The Quantitative Literacy Project* (Ganadesikan et. al., 1995) and recommendations for the teaching and learning of statistics that appeared in the GAISE documents, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin, Kader, Mewborne, Moreno, Peck, Perry, & Schaeffer, 2007).

Research

Early attempts to include statistics in the education of school age students prompted research into the teaching and learning of statistics which began in the1970's (particularly in the UK, Germany, Israel, and the U.S. For details see Shaughnessy, (1992)). This growing international interest in teaching and research in statistics education eventually gave birth to the *First International Conference on Teaching Statistics* in Sheffield, England in 1982, ICOTS I. Since then an ICOTS has convened every four years. ICOTS X was held in Hiroshima in 2018, and ICOTS XI will take place in Rosario, Argentina in 2022, after which an ICOTS conference will have been held on every continent and in 11 different countries.

This paper presents a retrospective analysis of the development of the most important ideas in statistics education from two different viewpoints: First from the perspective of curriculum recommendations and then from a research lens.

Curriculum Documents 1: NCTM Standards for Statistics Education of K-12 Students

Starting with the *Agenda for Action* document (NCTM, 1980), through the *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) and subsequently with *Principles and Standards for School Mathematics* (*PSSM*. NCTM, 2000), the National Council of Teachers of Mathematics has long advocated for teaching statistics in Grades K–12 in the United States and Canada. The 1989 standards were NCTM's first foray into establishing goals in statistics for school mathematics. In 1989 NCTM made the following recommendations:

For grades K – 4:

- Formulate and solve problems that involve collecting, describing and analyzing data
- Construct, read and interpret displays of data
- Explore concepts of chance

For grades 5—8:

- Systematically collect, organize and describe data
- Construct, read and interpret tables, charts, and graphs
- Make inferences and convincing arguments, and evaluate the arguments of others based on data analysis
- Develop an appreciation for statistical methods as powerful means for decision making

For grades 9 – 12

- Construct and draw inferences from charts, tables and graphs that summarize data from real world situations
- Use curve fitting to predict data
- Understand and apply measures of central tendency, variability, and correlation
- Understand sampling and recognize its role in statistical claims
- Design a statistical experiment to study a problem
- Analyze the effects of data transformations on measure of center and variability
- Test hypotheses using appropriate statistics

The 1989 standards recommended starting with data analysis in grades K–8, but took quite a jump in depth and abstraction in the grades 9–12 recommendations by including statistical design, mathematical transformations of parameters, and hypothesis testing. The 1989 standards are predominantly a list of content, concepts and procedures that students should know and be able to do, though the process of making inferences was included for grades 5–12. Ten years later in *Principles and Standards for School Mathematics* (*PSSM*), NCTM's standards for statistics were organized under four broad processes in grade bands K–2, 3–5, 6–8, and 9–12. PSSM recommended that instructional programs PreK-12 should enable all students to:

- Formulate questions that can be addressed with data and collect, organize and display relevant data to answer them
- Select and use appropriate statistical methods to analyze data
- Develop and evaluate inferences and predictions based on data
- Understand and apply basic concepts of probability

These four broad processes remain the same throughout all four grade bands in PSSM but grow in depth throughout the grades. For example, the trajectory for *Developing and evaluating inferences and predictions based on data* across the grades progresses through the grade bands:

PreK–2. Discuss events related to students' experiences as likely or unlikely

Grades 3–5. Propose and justify conclusions and predictions based on data and design studies to further investigate conclusions or predictions

Grades 6–8. Use observations about differences between two or more samples to make conjectures about the populations from which the samples were taken.

Make conjectures about possible relationships between two characteristics of a sample on the basis of scatterplots and approximate lines of fit.

Grades 9–12. Use simulations to explore the variability of sample statistics from a known population and to construct sampling distributions.

Understand how sample statistics reflect the values of population parameters and use sampling distributions as the basis of informal inference.

Notable in the *PSSM* standards when compared to the earlier NCTM standards is the growing emphasis on making and testing data-based conjectures and the introduction of the term "distribution".

Curriculum Documents 2: The Central Role of Variability—Recommendations from the American Statistical Association

During the 1980's and statistics education in schools concentrated on measures of center and neglected the important role that variability plays in statistics. Mathematics curricula introduced statistics to students primarily through calculating modes, medians, and means. In his position paper on statistics content and pedagogy, president David Moore of the ASA (1997) emphasized the crucial role that variability plays in statistics education. Without variability statistics would not even exist. The writings of Moore and others sounded a clarion call for mathematics education to rethink what the big ideas in statistics education really are. Subsequently statistics education researchers began to concentrate more on investigating students reasoning about variability. (E.g., Shaughnessy, Watson, Moritz & Reading, 1999; Melitou, 2002; Toruk & Watson, 2000; Watson, Kelly, Callingham & Shaughnessy, 2003; Watson & Kelly, 2004; Reading & Shaughnessy, 2004). The GAISE documents (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (*Franklin et al, 2007) appropriately pointed to the central role of variability in its four-step statistical investigation process:

I. Identify a Statistical Question—*Anticipate Variability*

Formulate questions that can be answered with data

II. Collect Data—*Acknowledge Variability*

Design for differences and plan to collect appropriate data

III. Analyze Data—*Account for Variability by Using Distributions*

Select appropriate graphical and numerical methods to analyze the data

IV. Interpret Results—*Allow for Variability as you look beyond the data*

Interpret the analysis and relate it back to the original question

Figure 1. The statistical investigation process.

Like *PSSM,* the GAISE documents also emphasized statistical processes as the organizing principles for teaching statistics in K–12. GAISE describes three levels (A, B, and C) of sophistication and growth for each of the four components of the statistical investigation cycle. The three levels roughly correspond to recommendations for teaching statistics in grades K–4, 5–8 and 9–12 respectively.

Curriculum Documents 3: Recommendations from NCTM's *Essential Understandings of Statistics*

As the implementation of statistics has grown in school mathematics programs, many of our mathematics teachers have found themselves in the position of having to teach statistics concepts when they have little or no preparation in statistics themselves. In order to provide some professional development and assist middle and secondary school mathematics teachers in adding statistics to their teaching repertoire the National Council of Teachers of Mathematics included statistics in their series *Essential Understandings* in school mathematics. The *Essential Understandings* books cover algebra, geometry, number and operation, proportional reasoning, mathematical reasoning and statistics. Both *Essential Understanding of Statistics Grades 6–8* (Kader & Jacobbe, 2013) and *Essential Understanding of Statistics Grade 9–12* (Peck, Gould, & Miller, 2013) identify some big ideas in statistics that all teachers should know and be able to teach at their respective grade levels. In the grade 6–8 book, Kader & Jacobbe identify four big ideas for teaching statistics to middle school students:

- Variability in Data and Distributions
- Comparing Distributions
- Associations between Two Variables
- Samples and Populations

The concept of a distribution plays a prominent role in all four of these recommendations if one considers that bivariate distributions of data form the basis for exploring associations between variables. In the grade 9–12 book Peck et al identify the following essential themes that form the foundation of the big ideas in statistics:

1. Data consists of structure and variability
2. Distributions describe variability
3. Hypothesis tests answer the question, "Do I think this could have happened by chance?"
4. The way data are collected matters

5. Evaluating an estimator involves considering bias, precision, and sampling method

For Peck et al these five big organizational ideas are interrelated. Hypothesis testing is the basis for making decisions under uncertainty based on the limitations of the data provided. The data upon which statistical decisions are made are only as good as the care with which they are produced, so that attention to sources of bias and precision in estimating parameters such as measures of center and variation is critical.

THE TWO BIGGEST IDEAS IN STATISTICS EDUCATION

Suppose that you were asked to pick two ideas in statistics that you thought were the most important ones for our students to learn and our citizens to be competent in understanding. What would be your choice? The most important goal for statistics education is to enable our students and citizens to understand that decision-making under uncertainty is based upon samples of data. We rarely have access to complete information about an entire population under consideration when making statistical decisions or estimating the likelihood of events. Statistics does not rely on mathematical proof or deterministic reasoning using axioms. Rather, statistics involves making decisions based on data generated under conditions of uncertainty. Given that the *pre-eminent goal of statistics education is to understand decision making under uncertainty*, I claim that the two biggest ideas in statistics education are *distribution* and *inference.* These two ideas are the heart and soul of statistical decision making. I base this conclusion partly on the analysis above of the trajectory and development of curriculum recommendations throughout the history of statistics education, but also upon some recent research in statistics education that gives added support to the claim that *distribution* and *inference* are indeed the two biggest overarching ideas in statistics education.

Recommendations from Research: The big ideas in statistics

Beginning in the 1990's researchers began to investigate students' understandings of big statistics concepts from a developmental perspective. Research on student understanding of concepts such as average and variability has proposed trajectories of student reasoning, levels of student understanding that become deeper over time. Furthermore, concepts such as expectation and variation are components of bigger ideas such as distribution and inference. Examples of reasoning trajectories from research on some big ideas in statistics are discussed below.

Expectation

The term expectation encompasses research on measures of center such as mean, median, and mode as well as considerations of expected clumping in the data. Mokros & Russell (1995) proposed one of the first trajectories of students' understanding of average.

Using interview tasks that involved “messy situations” from everyday familiar contexts with grades 4, 6, and 8 students Mokros & Russell identified five different ways that students think about average: Average as *mode* (mosts), average as *algorithm*, average *as reasonable*, average as *midpoint*, and average as *balance point*. Watson & Moritz (2000) interviewed about a hundred students in grades 3, 5, & 7 and found their conceptions of average moved from telling idiosyncratic stories about average to thinking of average as ‘mosts or middles’, and eventually to understanding that an average is a representative for summarizing a data set. Reflecting on the research on students’ conceptions of expectation, Konold & Pollatsek (2002) proposed that students’ think of average in various ways: average as *typical value,* average as *fair share,* average as *data reducer,* or average as *signal amid noise.* It is clear from the research on students reasoning about expectation that students possess a rich collection of conceptions about expectation which teachers can build upon. (For a more detailed discussion about research on students’ conceptions of average, see for example Shaughnessy, 2007).

Variation

Three developmental frameworks for students reasoning about variability have contributed to identifying a trajectory for students understanding of variability. (Langrall et al (2018, p. 494, the NCTM *Compendium of Research in Mathematics Education*). Ben-Zvi (2004) noticed students begin by recognizing variability across various data values. Later students use variability to compare groups, then they are able to combine measures of spread and center in comparing groups, and eventually they consider variability as a construct that occurs both within and between distributions of data. Watson, Callingham, & Kelly (2007) describe a progression of student thinking that encompasses both expectation and variability. Reid & Reading (2008) describe a hierarchy of student reasoning about variation ranging from no consideration of variation, to recognition of variation within a group, to recognition of variation between groups that can lead to inference. In an analysis of the research on students’ conceptions of variability, Shaughnessy (2007) outlined eight types of conceptions of variability that have been identified by research:

1. Variability in *particular values* in a data set
2. Variability as *change over time*
3. Variability as the *whole range* of a data set
4. Variability as the *likely range* of a sample
5. Variability as *distance from some fixed point*
6. Variability as *sum of residuals*
7. Variability as *covariation or association*
8. Variability as *distribution*

The first four of types of variability in this list involve an exploratory data analysis perspective, while the last four types refer primarily to ways to measure variability. The terms variability and variation are sometimes used almost interchangeably, however some authors (e.g., Reading and Shaughnessy, 2004) prefer to use the term variability for the tendency for a characteristic to change, while the word variation is a measurement characteristic. The first four types refer to variability, while the last four involve some type of measurement of change. Research on type 4, variability as the *likely range of a sample*, has led to research about students' conceptions of sampling distributions. A closer look at some research tasks and student responses to the tasks may provide some insight into why distribution is one of the two biggest ideas in statistics education.

The Candy Sampling Task

100 candies, 20 yellow, 50 red, and 30 blue, are put in a jar and mixed together. A student pulls 10 candies from the mixture, counts the number of reds, and writes that number on the board. Then the student puts the candies back in the bowl and mixes them all up again.Four more students also draw a sample of 10 candies, and write their number of reds on the board,

What numbers would you predict for the number of reds in each of those five samples of 10 candies? Write your predictions in the spaces below.

_____ _____ _____ _____ _____

Why do you think those would be the numbers of reds in the five samples?

Fig 2. The candy sampling task.

This task and variations of it were given to hundreds of students in grades 4, 5, 6, 9, & 12 in Australia, New Zealand, and the United States (Shaughnessy, Watson, Moritz, & Reading, 1999). The task was used to determine what students perceived as the *likely range* of values that would occur in a repeated sampling scenario. Student responses fell into clusters that were deemed *narrow, wide, high, low,* and *reasonable.* For example, some students said they'd expect the results of the sample to be 6, 7, 5, 8, 9 reds because 'there are a lot of reds in the jar.' This is typical of a *high* response as all the sample predictions are above the expected value of 5 red. High responses focused on 'mosts', and ignored the proportion of reds in the mixture. In *low* responses like 3, 4 ,3, 5, 2 students felt that the other two colors would overwhelm red, so there would be fewer reds than might be expected. Students who predicted *wide*, like 1, 5, 7, 10, 2, did so because they claimed that 'anything can happen.' On the other hand, some students predicted results like 5, 5, 6, 5, 6, or even 5, 5, 5, 5, 5 because 'that's what is supposed to happen.' Such *narrow* predictions put too much weight on the theoretical probability of obtaining 5 red candies on any one pull,

and neglected potential variability in repeated samples. Overall, some students attended to centers too much, some to variability too much, while other students did rely on both expectation and variation to predict a *reasonable* range of numbers of reds in the outcomes, such as 3, 7, 5, 6, 4. Research on tasks like the candy sampling task have led to research into students' conceptions about distributions, in particular their conceptions about sampling distributions. The candy sampling task also surfaces the tension that can arise between attending to expectation or attending to variability in data, especially when students are asked to make predictions for samples from a known population (Watson 2009; Watson & Kelly, 2004).

Distribution

Comparisons across several hypothesized developmental frameworks for the concept of distribution are provided in Langrall et al (2018, p. 494). Each of these frameworks acknowledges that the concept of distribution encompasses multiple aspects such as shape, variability, and expectation, and that integration of all of these aspects is required for students to reason about and make inferences from distributions. Reading and Reid's framework (2006) for understanding distributions starts with students acknowledging a single parameter of a distribution (e.g., center), then several parameters, next integrating centers and spreads, and finally proceeding to a second cycle of reasoning which involves students' growth in making inferences from distributions. A framework for distributional thinking proposed by Noll & Shaughnessy (2012) was based on their research on students' conceptions of sampling distributions. According to Noll & Shaughnessy, students' development of the concept of distribution involves the gradual integration of shape, centers, and spread. Students first notice individual aspects of a distribution, then learn to make predictions for sampling distributions by relying on both expectation and variation. Noll & Shaughnessy propose that students' reasoning about sampling distributions progresses through levels from *additive* to *proportional* and finally to *distributional* reasoning. (See Figure 3).

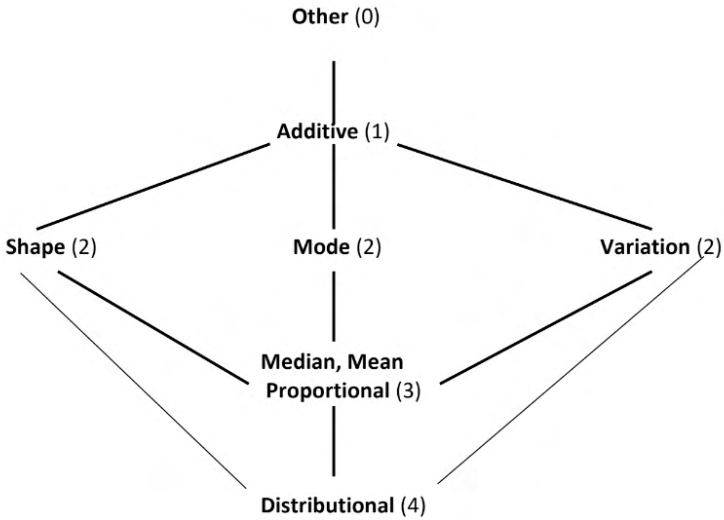


Fig 3. Lattice of student reasoning about sampling distribution.

The lattice in Figure 3 points first to a development of conceptions of expectation from 'more' to 'most' (mode) to 'means and medians' (which involve proportional reasoning), and finally to reasoning about distributions in which students' thinking integrates the aspects of shape, expectation, and variation. Students' responses to tasks like the *Prediction Task* and the *Mystery Mixture* task (see below) led Noll & Shaughnessy to propose this developmental reasoning lattice for distributional thinking.

Working in small groups, students in a class pull samples of 10 candies from a jar that has 1000 candies. They pull 50 samples of ten. The jar has 250 yellow and 750 red candies in it. Each time they put the sample back and remix the jar.

Consider the number of reds in each handful. Where would you expect 95% of the handfuls of ten candies to be?

From _____ # reds To _____# reds (Fill in the blank spaces).

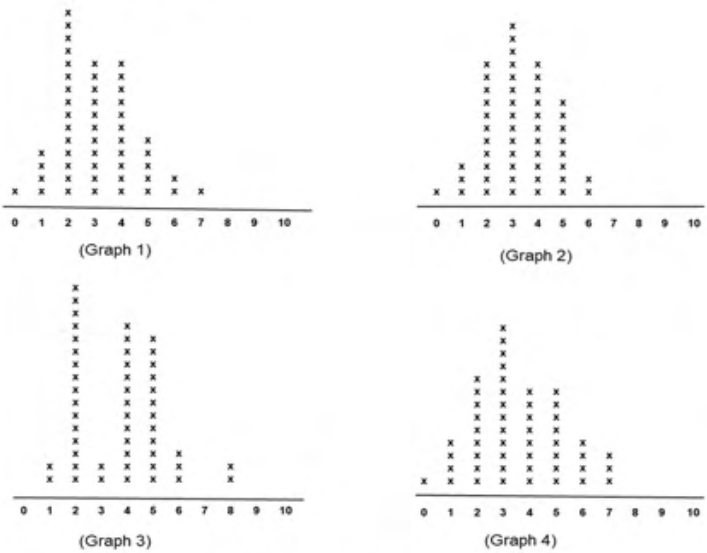
Why do you think that?

Complete the frequency chart below to show what you think the numbers of reds in 50 trial handfuls might look like. (Note: students were provided labeled graph paper to plot their predicted sampling distribution).

Figure 4. The Prediction Task

The four frequency graphs below came from a class in which four groups of students drew 50 samples of ten candies to estimate the proportion of reds in a mystery mixture of 1000 red and yellow candies in a large jar.

The four frequency graphs below came from a class in which four groups of students drew 50 samples of ten candies to estimate the proportion of reds in a mystery mixture of 1000 red and yellow candies in a large jar.



a) What do you think the mixture in the jar might be?

b) Explain why you think this.

Figure 5. The Mystery Mixture Task.

In the Prediction task students are told ahead of time the proportions of the colors in the parent population and then asked to predict what a sampling distribution for sample proportions will look like. As with the Candy Task, most students' responses fell into the categories *wide, narrow, and reasonable* for both their predicted range for the # of red in handfuls, and in the graphs that they constructed for 50 sample proportions.

However, in the Mystery Mixture task students are provided multiple sampling distributions from an unknown population and asked to use them to infer what the parent population is. Students who predicted 200-250 reds in the mystery mixture reasoned using a 'mosts' point of view, and were heavily influenced by distributions 1 & 3 which have a mode of 2 reds in handfuls. Students who looked for 'balance points' of the graphs reasoned proportionally and tended to predict around 300 reds in the mixture. Still other students noticed that the graphs tended to be skewed to the right, and they integrated shape with center and spread into their reasoning and inferred that the mixture probably contained more than 300, perhaps even 350 - 400 reds. In both the Prediction task and the Mystery Mixture task students had opportunities to focus solely on one of the aspects of the sampling distributions (shape, centers, variability) or to integrate them into their predictions and inferences.

Inference

The Mystery Mixture task asks students to make an inference from several sampling distributions of a sample statistic. There is no formal hypothesis testing involved, students are simply asked what they believe the composition of the parent population is and why they believe it. Researchers and curriculum developers refer to this type of inference as 'informal inference'. Informal inference has its roots in exploratory data analysis, often in the exploration of data that have been produced from simulations. Students can estimate likelihoods from samples of data without resorting to a test statistic or working with a probability distribution. Cobb (2007) argued that introductory statistics courses should start with inference early on prior to any hypothesis testing that resorts to theoretical distributions. Since the logic of formal statistical inference has always been a difficult stumbling block for students, educators have been experimenting with various approaches to introducing inference that could avoid some of the cognitive complexity and pitfalls in formal inference. Rossman (2008) promotes simulations via randomization tests as a transparent informal approach to statistical inference. Zeiffler, Garfield, Del Mas, & Reading, (2008) define informal statistical inference as students using informal statistical knowledge about observed samples to support inferences about unknown populations. Makar and Rubin (2018) point out that there is general agreement that the important characteristics of informal inference are: i) a claim is made that goes beyond the data at hand; ii) the data are used as evidence to support the claim; iii) the claim involves the articulation of uncertainty; iv) decisions or inferences are based upon aggregates in the data, variability, or shape, i.e., aspects of distributions of data; v) contextual knowledge plays a role in the analysis and inference. Inference is one of the two biggest ideas in statistics because students, even at a very young age, can begin to make inferences based on data that they have collected on a statistical question. The statistical investigation cycle outlined in the GAISE document—pose a question, collect data, analyze the data, make conclusions—is even more powerful for students when it includes making inferences in the analysis and conclusions phases.

Recommendations for future research and teaching on the big ideas in statistics

The future of research in statistics education

Many of the big conceptual ideas in statistics such as distribution, expectation, variation, and randomness identified above reside predominantly in the third stage of the GAISE statistical investigation cycle, analyzing the data. However, there are other important processes in the statistical investigation cycle, such as: posing a statistical question, generating appropriate data to answer a statistical question and communicating the results and conclusions. These other statistical processes must also be included in the statistical

education of our students and in the professional development of our classroom teachers. Unlike some big concepts such as expectation, variability, and distribution there has not been much research on developing students' ability to pose statistical questions or their ability to communicate and defend their data-based conclusions. The first and last phases of the GAISE statistical investigation cycle have not yet been adequately researched.

More research is needed to validate the developmental frameworks that have already been proposed for expectation, variation, and distribution. Meanwhile the next 'big idea' in research appears to be inference, in particular informal inference. A special issue of the *Statistics Education Research Journal* was dedicated to articles about informal inference, particularly within statistical modeling contexts (*SERJ* 16 (3), November, 2017). Various definitions of informal inference have been proposed and some of the components of informal inference have been identified. However, a developmental framework for students' reasoning about inference analogous to those for variability and distribution does not yet exist. Case & Jacobbe (2018) report a framework for understanding students' difficulties when making inferences from simulations. However, much more research is needed about how inferential reasoning develops starting with young children and up through the grades in order to identify potential levels of student reasoning about inference.

The future of teaching statistics

Teaching is a social process, it involves countless interactions between students and their instructors. Any recommendations for teaching statistics must include considerations about the teacher as well as the students. Our teachers are on the front line of statistics education, and many of the teachers in our current work force still do not have sufficient experience with statistics. Most of them are mathematics teachers. As Cobb & Moore (1997) pointed out, mathematics and statistics are very different disciplines. Mathematics is grounded in certainty and deductive reasoning based on axioms and previously established results. Statistics on the other hand lives in the realm of uncertainty, statistical results are couched in terms of likelihoods, probabilities, or confidence intervals. Mathematics and statistics are epistemologically and philosophically different from one another. Our teachers need experiences themselves in carrying out statistical investigations—perhaps in conjunction with their students—they need to immerse themselves in thinking about and drawing conclusions from data. Teachers need to develop both their content knowledge and their pedagogical content knowledge of statistics. The NCTM *Essential Understandings* series in statistics provides content knowledge support for middle and secondary school teachers of statistics (Kader & Jacobbe, 2013; Peck et al, 2013). The ASA GAISE documents also provide support for developing teachers' pedagogical content knowledge in statistics. Both publications provide many examples of tasks that can be implemented in the classroom using the statistical investigation cycle.

As for our future teachers of statistics, the ASA recently developed and published *The Statistical Education of Teachers (SET)* which lays out recommendations for the statistical education of all perspective elementary, middle, and secondary teachers (Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Scheaffer, & Spangler, 2015). *SET* recommends both coursework and statistical modeling experiences for all teachers. Coursework for all teachers should begin with a data analytic approach. Additional recommendations for middle and secondary school teachers include coursework in statistical methods and statistical modeling. The ASA has taken a very futuristic view in the *SET* document, projecting that the need for statistics education will continue to grow throughout the world. Teachers will need to know much more about statistics and statistical thinking to prepare students and citizens for our data- intense world.

What does our walk through the history and research on the Big Ideas in statistics suggest for the teaching and learning of statistics for our students? We should START with the big ideas. Introduce the concept of a statistical question, one that requires data to be answered. Make sure that students understand the difference between mathematics and statistics, they are two different disciplines involving two different types of reasoning. Give students opportunities early on to make informal inferences about distributions of data. Ask students, "What do you notice? What do you wonder about?" Get students involved in generating sampling distributions from repeated samples from both known and unknown populations, making informal inferences from the samples they've obtained. First have students recognize and attend to important aspects of distributions such as shape, centers, and variability, later include ways of measuring expectation and variation. Use the research on developmental frameworks for expectation, variability and distribution to help guide instruction. Get students in the habit of posing their own statistical questions while using the statistical investigation cycle from GAISE. Make sure that attention to variability is foremost throughout the statistical investigation cycle. Most of all, empower students to be competent and confident with the big concepts and processes of statistics, and with the nature of statistical argumentation.

REFERENCES

Ben-Zvi, D. (2004) Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 42-63.

Case, C. & Jacobbe, T. (2018). *Statistics Education Research Journal*, *17*(2), 9-29. Retrieved from https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ17(2)_Case.pdf

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course. A Ptolemaic curriculum? *Technology Innovations in Statistics Education,* 1(1), Article 1. Retrieved from http://escholarship.org/uc/item/6hb3k0nz

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly,104*(9), 801-823.

Franklin, C., Kader, G., Mewborne, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education.* Alexandria, VA: ASA.

Franklin, C.A., Barbabliotti, A. E., Case, C. A., Kader, G. D., Scheaffer, R. L., & Spangler, D. A. (2015). *The Statistical Education of Teachers.*

Ganadesikan, M., Scheaffer, R. L., Landwehr, J. M., Watkins, A. E., Barbella, P. Kepner, J., Newman, C. M., Obremski, T. E., & Swift, J. (1995). *Quantitative Literacy Series.* New York: Pearson Learning (Dale Seymour Publications).

Kader. G., & Jacobbe, T. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 6-8.* Reston, VA: NCTM

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(4), 259-289.

Langrall, C. W., Makar, K., Nilsson, P., & Shaughnessy, J. M. (2017). Teaching and learning probability and statistics: An integrated perspective. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education.* Reston, VA: NCTM.

Makar, K., & Rubin. A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Cham, Switzerland: Springer International.

Melitou, M. (2002). Conceptions of variation. A literature review. Statisics Education Research Journal, *1*(1), 46-52.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistics Review, 65*(2), 123-165.

Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, R. F., Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1973). *Statistics by Example.* Reading, MA: Addison-Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Noll, J., & Shaughnessy J. M. (2012). Aspects of students' reasoning about variation in empirical sampling distributions. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 509-556.

Peck, R., Gould, R., & Miller, S. J. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 9-12.* Reston, VA: NCTM.

Reading C., & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 46-68.

Reid, J., & Reading, C. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal, 7*(1), 40-59.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, reasoning and thinking (pp. 201-226).* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's point of view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York, NY: Macmillan.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M., Watson, J., Reading, C. & Moritz, J. (1999. April). School mathematics students' Acknowledgement of statistical variation: There's more to life than centers. Paper presented at the research pre-session of the 77th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, San Francisco, CA.

Tanur, J., Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1972). *Statistics: A Guide to the Unknown.* San Francisco, CA: Holden-Day.

Toruk, R., & Watson, J. M. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal. 9*, 60-82.

Watson, J. M., (2009). The influence of variation and expectation on developing awareness of distribution. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 32-61.

Watson, J, M., & Kelly, B. A. (2004). Expectation versus variation: Students' decision making in a chance environment. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 4,* 371-396.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding average. *Mathematical Thinking and Learning, 2,* 11-50.

Watson, J. M., Callingham, R. A., & Kelly, B. A. (2007). Students appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 83 – 130.

Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A, & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school Students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(1), 1-29.

Watson, J. M., Fitzallen, N., & Carter, P. (2013). *Top Drawer Teachers: Statistics.* Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers and Services Australia. Retrieved from http://topdrawer.aamt.edu.au/Statistics

Zeiffler, A., Garfield, J., Del Mas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

Zeiffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What is statistics education? In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education,* 37-70.

CAPÍTULO 4

USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN TIEMPOS DE COVID-19, PUCALLPA 2021

Data de aceite: 01/03/2022

Weninger Pinedo Chambi
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía
Ucayali-Perú
https://orcid.org/0000-0002-4018-2529

Mariano Magdaleno Mendoza Carlos
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía
Ucayali-Perú
https://orcid.org/0000-0001-9668-9356

Angel Hasely Silva Mechato
Universidad Nacional de Piura
Piura-Perú
https://orcid.org/0000-0001-9707-2358

Ronald Marlon Lozano Reátegui
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía
Ucayali-Perú
https://orcid.org/0000-0002-0656-0792

Vitelio Asencios Tarazona
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía
Ucayali-Perú
https://orcid.org/0000-0002-0253-3148

Manuel Ricardo Guerrero Ochoa
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía
Ucayali-Perú
https://orcid.org/0000-0003-3653-283

Iris Olivia Ruiz Yance
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía
Ucayali-Perú
https://orcid.org/0000-0002-2300-3672

RESUMEN: En el presente artículo, se da conocer el uso del Software Geogebra, como recurso de aprendizaje de la matemática en la modalidad no presencial, en tiempos del Covid-19 en estudiantes universitarios, buscando demostrar su utilidad como herramienta pedagógica, pues en las simulaciones prácticas de su uso a través de clases virtuales de modo sincrónico, ha permitido dinamizar el desarrollo de las sesiones de aprendizaje en forma práctica, despertar el interés de los estudiantes para la resolución de los problemas y justificar el desarrollo analítico y gráfico de sus resultados, aplicando los conceptos de geometría, funciones, máximo y mínimo e integrales. La aplicación de una encuesta ha mostrado un gran porcentaje de satisfacción en el uso del programa informático.

PALABRAS CLAVE: Software Geogebra, aprendizaje, matemática; desarrollo analítico; visualización gráfica; Covid-19.

USE OF GEOGEBRA SOFTWARE IN LEARNING MATHEMATICS IN ENGINEERING STUDENTS IN TIMES OF COVID-19, PUCALLPA 2021

ABSTRACT: In this article, we present the use of GeoGebra software as a resource for learning mathematics in the non-face-to-face modality,

in times of Covid-19 in university students, seeking to demonstrate its usefulness as a pedagogical tool, because in the practical simulations of its use through virtual classes in synchronous mode, has allowed to dynamize the development of the learning sessions in a practical way, to awaken the interest of the students for the resolution of the problems and to justify the analytical and graphical development of their results, applying the concepts of geometry, functions, maximum and minimum and integrals. The application of a survey has shown a high percentage of satisfaction in the use of the software.
KEYWORDS: Geogebra software, learning, mathematics, analytical development, graphical visualization, Covid-19.

1 I INTRODUCCIÓN

Ante la suspensión del sistema educativo en la modalidad presencial como política nacional frente al impacto del Covid-19 en el 2020, en todos los niveles educativos, el Ministerio de Educación y la Superintendencia Nacional de Educación de Educación Superior Universitaria (SUNEDU), autorizaron a las universidades la modalidad no presencial, para los exámenes virtuales y desarrollo de las labores académicas en la modalidad no presencial, lo cual generó dilemas en los docentes, en relación a las estrategias de enseñanza y aprendizaje que se debe utilizar en las ciencias básicas y de especialidad. Se priorizó el uso del Software GeoGebra, como recurso digital de aprendizaje, por ser de acceso fácil para los estudiantes, con el uso de sus herramientas para la visualización gráfica en forma dinámica en el plano bidimensional y tridimensional, en el aprendizaje de la geometría, relaciones y funciones, máximos y mínimos, optimización, derivadas e integrales.

Según Juárez y Aguilar (2018), el campo del pensamiento matemático, permite articular conocimientos y también organizar la aplicación de la aritmética y la geometría, haciendo posible la interpretación de la información y estimular procesos de medición al lenguaje algebraico, facilitando la migración del razonamiento intuitivo al deductivo y promover la búsqueda de información con recursos que utiliza para mostrarla; lo cual es complementado por Juárez (2013), al manifestar que el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones matemáticas, sólo es importante en la medida en que los alumnos pueden utilizarlos de manera flexible para solucionar problemas de la vida diaria.

Sin lugar a dudas, el éxito en las ciencias matemáticas depende en gran medida de conocimientos previos y firmes de los estudiantes universitarios en ingeniería en el dominio de la Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría, Estadística y Probabilidad.

La actual pandemia causada por el ataque del Convid-19, ha generado un cambio sustancial de la modalidad de educación presencial hacia la educación virtual, con sus inconvenientes y sus ventajas, no sólo ha afectado la salud fisiológica de las personas, sino que también ha hecho estragos en el comportamiento y la motivación por aprender del estudiantado universitario, que vislumbran un futuro incierto y complejo, es por

ello que los docentes, con la finalidad de motivar en los estudiantes el aprendizaje de las Matemáticas, están empleando nuevas estrategias pedagógicas como el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación-TICs, a fin de despertar su interés por las asignaturas y aprovechar las competencias que les permiten el dominio a los jóvenes, del manejo de programas informáticos, para potenciar así sus capacidades en la comprensión y aprehensión de los conceptos matemáticos, orientados a disminuir la abstracción de los conocimientos adquiridos y vivenciarlos a través de la solución de problemas prácticos y reales, utilizando el programa GeoGebra.

El uso de programas informáticos para la enseñanza de la matemática, ya ha sido experimentado por Encalada y Delgado (2018), que utilizaron el software educativo Cuadernia, que encontraron una influencia significativamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el rendimiento académico en estudiantes de 5to año de educación secundaria, al mejorar su capacidad de razonamiento y demostración, comunicación matemática y la resolución de problemas. Del mismo modo, Villamizar (2020), usó el GeoGebra como un recurso mediador para la experimentación del fenómeno de caída libre y la modelización de la energía mecánica, cuyos resultados evidenciaron que es una alternativa de laboratorio portable para brindar recursos en la simulación, permitiendo a los estudiantes de secundaria, mediar procesos de modelización matemática de la energía mecánica de manera experimental, permitiendo la comprensión de conceptos físicos y matemáticos. Similares resultados evidenciaron Díaz-Nunja *et al.* (2018), que evaluaron los efectos del uso del software GeoGebra en la enseñanza de la geometría con estudiantes de secundaria, el cual logró desarrollar sus capacidades para el razonamiento y demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas. Por su parte Cenas *et al*. (2021), concluyeron que el software GeoGebra permite al estudiante ser más analítico de los contenidos matemáticos, usar menor tiempo en la solución de los problemas, y alcanzar objetivos claves como la mejora del rendimiento académico y el desarrollo eficiente de sus competencias matemáticas para su posterior uso práctico cuando el estudiante se desempeñe como profesional. También Téllez *et al*. (2017), en su investigación concluyeron que el uso del software Geogebra favorece el aprendizaje en estudiantes de las nociones básicas de la trigonometría al posibilitar transformar los paradigmas de enseñanza tradicional en matemáticas con el correcto uso de la tecnología. Arteaga *et al*. (2019), indican que el interés de enseñar a los estudiantes ciencias haciendo ciencias, ha encontrado en el software GeoGebra, a un candidato de extraordinario valor en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pues permite resolver de manera rápida y segura, los más variados y diversos problemas que se presentan en el aprendizaje de esta asignatura, al mismo tiempo que permite estimular y desarrollar la creatividad llevando a descubrir y construir conocimientos.

Por lo expuesto, el presente artículo tiene como objetivo demostrar la utilidad del software GeoGebra en la enseñanza de la Matemática en estudiantes universitarios.

2 I MÉTODO

En relación a la experiencia en el uso del software Geogebra, en las carreras de ingeniería, se les facilitó a los estudiantes el link de acceso a las sesiones con el uso del programa, donde se evidenció las capacidades programadas, el proceso didáctico con el desarrollo analítico y el contraste dinámico de las gráficas en GeoGebra.

A continuación se presentó ejercicios orientados a diagnosticar las debilidades que el estudiante podría presentar en estas áreas. Después de desarrollar los ejercicios, verificó su respuesta empleando el software GeoGebra comparando sus respuestas y, de este modo se actualizó en sus habilidades haciendo referencia al material de repaso que se le proporcionó.

2.1 Uso del software GeoGebra

A continuación, se evidencia la aplicación de conceptos en el desarrollo de problemas relacionados a la geometría, derivada, máximos y mínimos, optimización e integrales.

a. Problema de la caja

Se desea construir una caja sin tapa, a partir de una cartulina cuadrada de 10 cm. de lado a la que se recortarán las esquinas. Encontrar las dimensiones de las esquinas para que el volumen de la caja sea máximo.

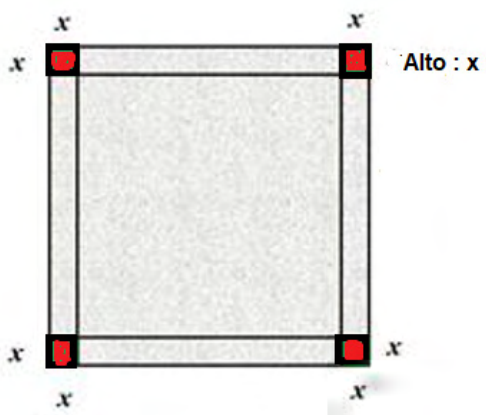


Figura 1.

Desarrollo analítico

Función volumen de la caja

$$v = (Largo) * (Ancho) * (Altura)$$
$$v(x) = (10 - 2x) * (10 - 2x) * (x)$$
$$v(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Aplicando el segundo criterio de la derivada

$$(x)' = \frac{d}{dx}(4x^3 - 40x^2 + 100x)$$

$$12x^2 - 80x + 100 = 0$$
$$3x^2 - 20x + 25 = 0$$
$$(3x - 5)(x - 5) = 0 \rightarrow \{x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = 5\}$$

$$v(x)'' = \frac{d}{dx}(v(x)')$$
$$v(x)'' = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 80x + 100\right)$$
$$v(x)'' = 24x - 80$$

Evaluando los puntos críticos:

$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_1=\frac{5}{3}} = 24\left(\frac{5}{3}\right) - 80 = -40 < 0$, lo que indica que es un máximo

$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_2=5} = 24(5) - 80 = 40 > 0$, lo que indica que es un mínimo

$$v(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$
$$v\left(\frac{5}{3}\right) = 74\ cm^3$$
$$v(5) = 0\ cm^3$$

Visualización gráfica:

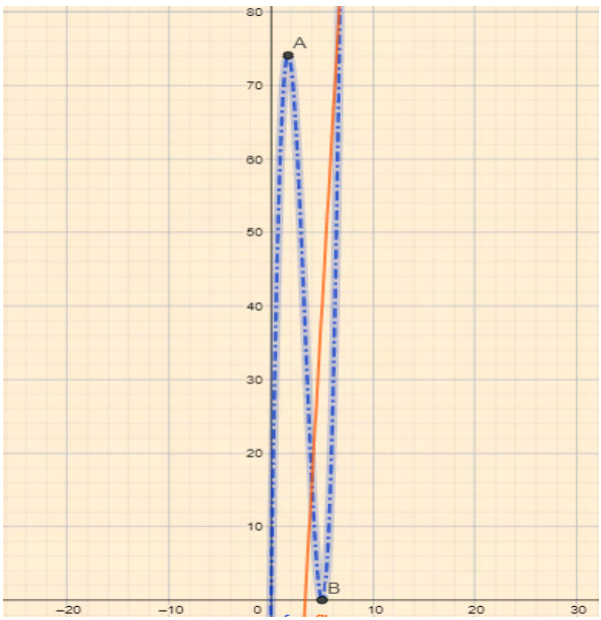


Figura 2.

Referencia: https://www.geogebra.org/m/hcagay6x.

Interpretación: Para x = 5/3, el volumen de la caja es máxima.

b. Problema de optimización lineal: Cultivo de maíz y soya

En una empresa agrícola, cultivar un área de maíz requiere 6 horas de mano de obra y un costo de S/ 36, en tanto que cultivar un área de soya requiere 2 horas de mano de obra y un costo de S/ 18. Si el agricultor tiene 12 áreas de tierra, 48 horas de mano de obra y S/ 360 de capital disponible, si la utilidad del maíz es S/ 40 por área y el de soya es de S/ 20 por área, determina cuántas áreas de cada cultivo debe sembrar el agricultor para maximizar su utilidad total (incluido el capital no utilizado).

Sean:

x = El número de áreas de maíz

y = El número de áreas de soya

Según los datos se elabora un cuadro de doble entrada:

Producto	N° de áreas	N° de horas de trabajo	Costo por área (S/)	Utilidad
Maíz	X	6x	36x	40x
Soya	Y	2y	18y	20y
Total	12	48	360	40x + 20y

Luego, el problema de programación lineal sería el siguiente:

$$Max\ f(x,y) = 40x + 20y$$
$$s.a.$$
$$\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 6x + 2y \leq 48 \\ 36x + 18y \leq 360 \\ x \geq 0; \geq 0 \end{cases}$$

Calcular el máximo valor de la función objetivo.

Visualización gráfica:

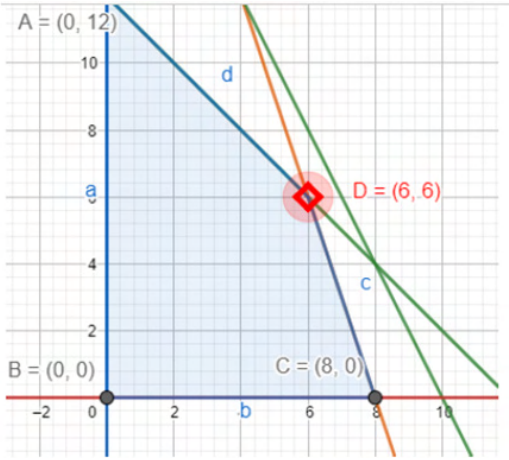


Figura 3.

https://www.geogebra.org/calculator/jgsdzv8v.

Interpretación: Utilidad máxima en el punto D = (6.6).

Max f(6,6) = 40(6) + 20(6) = 3600.

c. Analizar en la gráfica, la convexidad de los siguientes conjuntos

c.1) $A = \{(x, y) \epsilon\, R^2 /\ 6x - x^2 \geq y + 8\}$

c.2) $A = \{(x, y) \epsilon R^2 /\ \lfloor x^2 + y^2 - 10 \rfloor \leq 6\}$

Solución:

c.1) *Si tomamos dos puntos cualesquiera en el interior de la curva y al unirlos mediante un segmento, siempre está en su interior, se dice que es convexa (def. intuitiva). Para el caso a) se cumple, es convexa.*

Visualización gráfica:

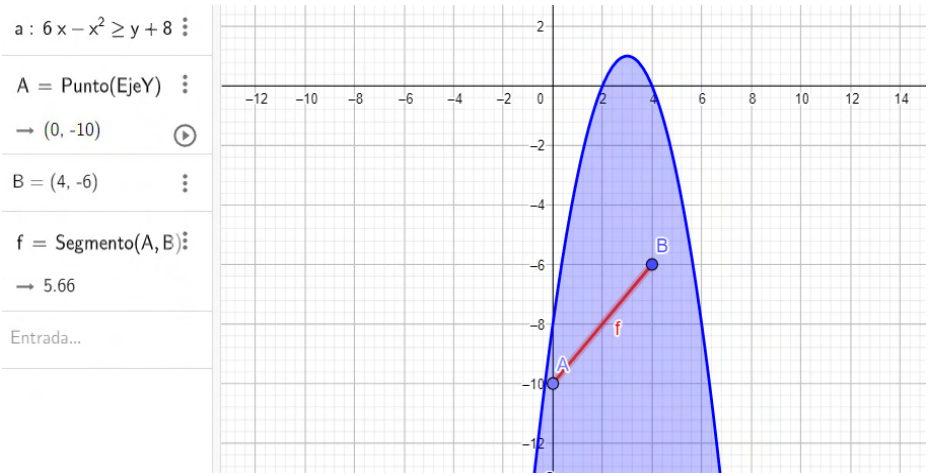


Figura 4.

Conjunto convexo.

c.2) *En la gráfica se observa que al unir dos puntos mediante un segmente, parte del segmente no queda en el interior del área sombreada. Por lo que concluimos que no es convexa.*

Visualización gráfica:

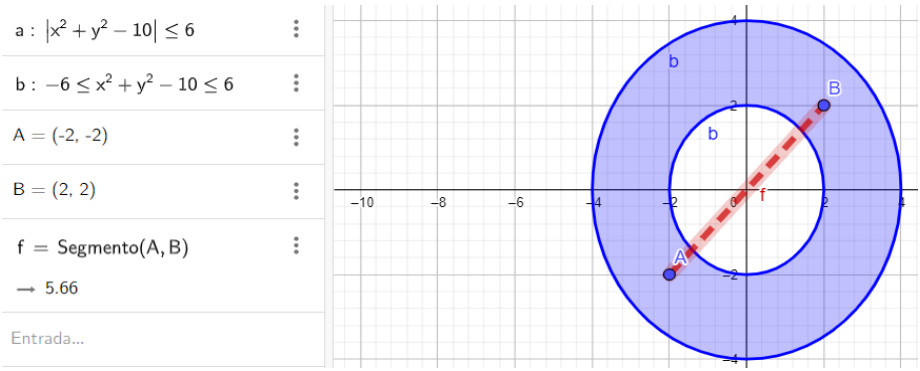


Figura 5.

Conjunto no convexo.

d. Problema Cálculo Integral - Volumen

Determinación del volumen de curva generada por la función f(x) = 2, limitada por x = 1 y x = 5, que gira alrededor del "Eje X ".

Desarrollo:

$$V = \pi * \int_{x_0}^{x_1} (f(x))^2 \, dx$$

Reemplazando los datos, tenemos:

$$V = \pi * \int_{1}^{5} (2)^2 \, dx$$

$$V = \pi * (4 * 5 - 4 * 1)$$

$$V = 16 * \pi$$

$$V = 50.27$$

Desarrollo empleando GeoGebra:

f(x) = 2

g(x) = Si (1≤x≤5, f(x))

A = (1,g(1))

B = (2,g(2))

C = (3,g(3))

D = (4,g(4))

E = (5,g(5))

h = Poligonal(A,B,C,D,E)

α = 359°

Superficie(h, α,EjeX)

Volumen = Pi*Integral((g(x))^2,1,5)

Visualización gráfica:

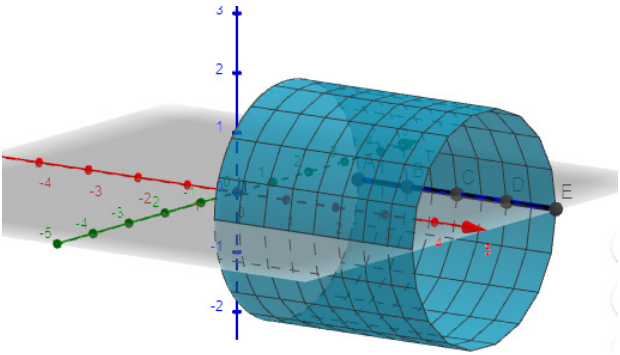


Figura 6.

Solido de revolución generado por una curva.

Volumen = π ∫ (((g(x))^2, 1,5).

Volumen = 50,27 u^3.

e. Paraboloide Apolónico

Calcular el volumen del Paraboloide Apolónico generado al girar alrededor del eje X la región limitada por $f(x) = \sqrt{x}$, $L_1: x = 0$; $L_2: x = 4$. *Aplicar el método del disco.*

Desarrollo:

Recordemos:

Teorema. Sea y = y(x) una función continua en el intervalo cerrado [a,b] tal que y(x) ≥ 0. Sea S el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje X la región limitada por la curva y = y(x), el eje X y las rectas x = a y x = b. Entonces el volumen de S es dado por:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^4 d\,x = \pi * \frac{x^2}{2} \Big|_0^4$$

$$V = \pi\left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 3.14 * 8 = 25{,}12\, u^3$$

Visualización gráfica:

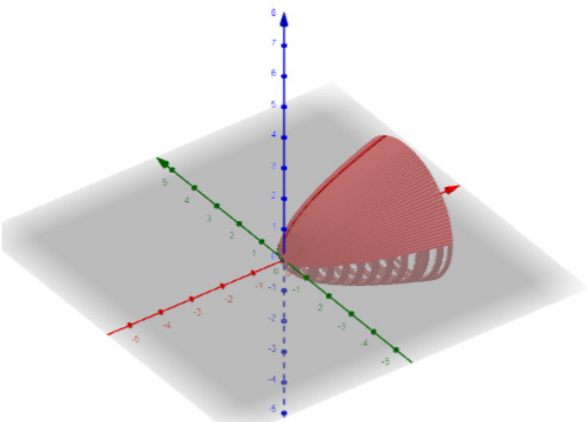


Figura 7.

Paraboloide Apolónico generado por una curva.

https://www.geogebra.org/m/b6eatbee.

Interpretación:

En el desarrollo analítico y determinación del volumen se aplica el método del disco para determinar el volumen, como lo han realizado Riaño y Lizarazo (2017), donde indica que "para estimar el volumen del fuste se rota P(x) sobre su eje en el intervalo [0, h]" (p.58).

3 | RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para medir el grado de satisfacción de los estudiantes para la resolución de los problemas con el uso del software GeoGebra, se aplicó una encuesta cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

N°	Item	Satisfacción	No satisfacción
01	El uso del software GeoGebra, te permite aprender de forma dinámica la matemática.	95%	5%
02	El uso del software, te permite visualizar geométricamente tus resultados.	100%	0%
03	Tu desarrollo analítico de un problema y uso del software GeoGebra, te permite contrastar tu respuesta.	100%	0%
04	En el desarrollo de la asignatura en su modalidad sincrónica, el uso del software GeoGebra es divertido y fácil de utilizar.	88,9%	11,1%

Tabla 1. Resultados obtenidos de la encuesta de satisfacción aplicado a los estudiantes universitarios.

FUENTE: https://docs.google.com/forms/d/11CvsuG1oV_NVGo0E8fpoBxqjkeN5wedlReO2Ijr 2k/ edit# responses}.

Interpretación:

Del 100 por ciento de estudiantes encuestados, con una media del 95,975 confirmaron satisfacción, en el uso del software GeoGebra en el aprendizaje de la matemática, pues lo encontraron muy dinámico, divertido y práctico por la facilidad de su uso.

Autores como Ruíz *et al*. (2013), manifiestan que el software educativo GeoGebra, permite a los docentes mejorar significativamente su trabajo dentro del aula y motiva en los estudiantes actitudes de “diversión” y “tensión” que los conducen directamente a la búsqueda de resultados, convirtiéndose en un reto y una forma de mostrar sus habilidades, generando en ellos un mayor sentido de competitividad, además que los permite poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos en las clases.

Según Parihuamán (2019) concluye que “demostrándose que los que emplean Geogebra superan a los que no lo emplean” (p.50). Del mismo modo Aldazabal *et al*. (2021), concluye que “el uso del software GeoGebra representó una excelente opción para la mejora de las habilidades resolutivas de problemas vinculados con figuras geométricas bidimensionales”. Respecto a la labor docente, según Aguilar (2015), concluye que “La aplicación de actividades usando el software GeoGebra motivó en el docente ampliar su conocimiento y dominio del software”. Respecto a la contingencia frente al impacto del Covid-19, con restricciones de conectividad a internet, siendo más crítico en la zona rural y pueblos originarios, y la necesidad de mediar la enseñanza de la matemática con herramientas digitales, se priorizó el uso del Software Geogebra. Como concluye Culzoni *et al*. (2021) que la “…mediación tecnológica irá adquiriendo las formas necesarias a la

realidad…" (p.80), experiencia que permitirá construir al docente y estudiantes nuevos paradigmas en aprendizaje.

4 I CONCLUSIONES

Se logró la satisfacción de los estudiantes universitarios en el uso dinámico del GeoGebra en el aprendizaje de conceptos de física, derivadas, optimización, geometría y volumen aplicando integrales, lo cual provocará el interés en el uso de otros programas informáticos similares.

El software GeoGebra utilizado para construcción de "animaciones" y "diseños geométricos", con sus excelentes recursos, se constituye en una herramienta dinamizadora para promover de modo eficiente el proceso de aprendizaje – enseñanza de la matemática, por lo cual se recomienda su uso en otras áreas de la enseñanza universitaria.

AGRADECIMIENTOS

- A la Dirección de Responsabilidad Social Universitaria y al Departamento Académico de Ciencias Básicas, a la Vicepresidencia de Investigación y la Dirección de Innovación, Transferencia Tecnológica e Incubadora de Empresas, organizadores del ciclo de conferencias en el marco de las Actividades Descentralizadas por la Semana Nacional de la Ciencia 2021, de la Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía.
- A los estudiantes de las Escuelas Profesionales de Ingeniería Agroindustrial e Ingeniería Agroforestal Acuícola de la Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, por su participación en las capacitaciones y llena.do de las encuestas.

REFERENCIAS

Aguilar-Hito, Ángela. **Metodología con el software Geogebra para desarrollar la capacidad de comunica y representa ideas matemáticas con funciones lineales.** 2015. Universidad de Piura. Perú. Disponible en https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/ 11042/3188/ MAE_EDUC209. pdf?sequence=2&is Allowed=y . Acceso en: 13-01.22.

Aldazabal Melgar, Omar F., Vértiz Osores. Ricardo I., Zorrilla Tarazona, Eduardo, Aldazábal Melgar Liliana H., Guevara Duarez, Felipe. **Software GeoGebra en la mejora de capacidades resolutivas de problemas de figuras geométricas bidimensionales en universitarios.** 2021. Disponible en:http://revistas.usil.edu.pe/index.php/pyr/article/view/1040/ 1314. Acceso en: 12-01-22.

Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. F., & Del Sol Martínez, J. L. **El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática.** 2019. Revista Conrado, 15(70), 102-108. Disponible en: http://conrado.ucf.edu.cu /index.php/conrado. Acceso en: 12-01-22.

Cenas Chacón, F. Y., Blaz Fernández, F. E., Gamboa Ferrer, L. R., & Castro Mendocilla, W. E. **Geogebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. Horizontes**. 2021. Revista de Investigación En Ciencias de La Educación, 5(18), 382–390. Disponible en: https://doi.org/10. 33996/revistahorizontes.v5i18.181. Acceso en: 12-01-22.

Culzoni C., Panigatti1 C. y Bergesse C. (2021**). El proceso de enseñanza y aprendizaje en asignaturas de matemática para ingeniería durante el aislamiento por Covid 19.** 2021**.** Disponible en: http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/116607. Acceso en: 12-01-22.

Diaz-Nunja, L., Rodríguez-Sosa, J., & Lingán, S. K. **Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima**. 2021. Propósitos y Representaciones, 6(2), 217. Disponible en: https://doi.org/10.20511/pyr2018.v6n2.251. Acceso en: 12-01-22.

. Juárez, M. R. **La Formación de docentes de matemáticas en Francia y México.** 2013.Tesis para obtener el grado de Doctorado en Educación. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cuernavaca, Morelos, México.

Juárez Eugenio, M., & Aguilar Zaldívar, M. **El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en primaria. 2018.** Números, 98, 75–86.

Parihuamán Quinde, Geraldina R.(2019). **Software GeoGebra y rendimiento académico en funciones reales en estudiantes de la universidad científica del sur. 2019.** Disponible en: http://repositorio.usanpedro. edu.pe/bitstream/handle/USANPEDRO/14746/Tesis_65754. pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acceso en: 12-01-22

Riaño M, O. & Lizarazo, I. **Estimación del volumen de madera en árboles mediante polinomio único de ahusamiento**. 2017. Colombia Forestal, 20(1), 55-62. Disponible en: http://www.scielo.org. co/pdf/cofo/v20n1/ v20n1a05.pdf. Acceso en: 12-01-22.

Ruiz, M., Ávila, P., & Villa-Ochoa, J. **Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas.** 2013. Disponible en: https://www.pedagogia.edu.ec/public/ docs/3d0d8e28687965d22d16dad72 b37b692.pdf. Acceso en: 12-01-22.

Téllez, J. F. C., Flores, E. G. R., & Silva, L. Z. **Uso del software Geogebra como estrategia de enseñanza para triángulos rectángulos de 30-60 dirigida a estudiantes de décimo grado.** 2017. Revista de Investigación Educativa del Tecnológico de Monterrey, 7(14), 56-62.

Villamizar Araque, F. Y. **GeoGebra como herramienta mediadora de un fenómeno físico.** Revista Do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. 2020. ISSN 2237-9657, 9(1), 76–89. Disponible en: https://doi.org/10.23925/ 22379657.2020.v9i1p76-89. Acceso en: 12-01-22.

CAPÍTULO 5

CONVIVÊNCIA ESCOLAR EM TEMPOS DE PANDEMIA: INVESTIGANDO OS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Data de aceite: 01/03/2022

Henrique Kuller dos Santos
Universidade Estadual do Centro-Oeste,
Departamento de Matemática
Irati-Paraná

Joyce Jaquelinne Caetano
Universidade Estadual do Centro-Oeste,
Departamento de Matemática
Irati-Paraná

RESUMO: A presente pesquisa de cunho qualitativo teve por objetivo investigar a convivência dos alunos do ensino fundamental II na Educação Básica. Pretendeu-se, para tanto, buscar fundamentos teóricos e pedagógicos atuais através do levantamento bibliográfico relacionados sobre a convivência escolar com o intuito de contribuir com o ensino e a aprendizagem na escola. Além disso, aplicou-se questionário aos estudantes do 8º ano do ensino fundamental II. Verificou-se que a investigação realizada aponta para a importância da escola, trabalhar os problemas de conflitos como parte do dia a dia escolar, pois quando os profissionais escolares aceitam esta empreitada, conseguem melhorar consideravelmente, a convivência entre os estudantes e, para tanto, o diálogo é a melhor ferramenta.
PALAVRAS-CHAVE: Convivência, aprendizagem, ensino.

ABSTRACT: This qualitative research aimed to investigate the coexistence of elementary school II students in Basic Education. It was intended, therefore, to seek current theoretical and pedagogical foundations through the bibliographic survey related to school coexistence in order to contribute to teaching and learning at school. In addition, a questionnaire was applied to students in the 8th year of elementary school II. It was found that the research carried out points to the importance of the school, to work the problems of conflicts as part of the school day, because when school professionals accept this endeavor, they can considerably improve the coexistence between students and, for that, Dialogue is the best tool.
KEYWORDS: Coexistence, learning, teaching.

INTRODUÇÃO

O espaço da sala de aula no âmbito escolar caracteriza-se em um ambiente de convivência em que se travam as mais diferentes relações entre professores e alunos, e entre alunos e alunos. Assim, a disciplina escolar é vista como uma ferramenta que favorece o processo de ensino e de aprendizagem, contribuindo para um ambiente favorável e propício à comunicação em sala de aula.

Nessa direção, os conflitos como a indisciplina e o bulling têm se constituído em verdadeiros obstáculos pedagógicos dos dias atuais. Diante disso, a boa convivência é fundamental para o exercício da cidadania, pois "es a traves de la relación con otros, de manera organizada, que el indivíduo puede adquirir la

categoria de ciudadano" (RESTREPO, et all, 2013, p.31).

Para Freire, "É na escola que se aprende a conviver e, um dos lugares onde se aprende a interpretar o mundo. É o espaço onde as regras e as leis regulam a convivência, o diálogo, a interação, onde se constrói as relações pessoais." (FREIRE, 2008, p.77).

Conviver com o outro é uma necessidade para cada um dos indivíduos de um dado grupo. Na escola, e certamente, na sala de aula, a convivência deste grupo vai influenciar na construção do currículo que vai sendo desenhado pelos atores deste determinado grupo. Como o professor vai administrar as questões postas pela convivência, matemática, é que vai determinar o sucesso e/ou o insucesso dos alunos na disciplina.

Para tanto, é preciso identificar as influências da convivência e suas implicações positivas e negativas na escola. Investigar, portanto, as experiências bem e mal sucedidas das implicações da convivência no currículo escolar, é trazer respostas para a prática pedagógica do professor de qualquer disciplina com vistas à melhoria da qualidade do seu ensino. Assim, é fundamental aprofundarmos este tema para melhor compreensão do universo da sala de aula, da aprendizagem e da prática do professor.

Nessa perspectiva, o presente trabalho teve por objetivo geral, investigar a convivência escolar em uma turma do 8º ano do ensino fundamental da Educação Básica, fundamentadas em perspectivas teóricas e pedagógicas atuais, bem como no olhar dos investigados. Devido à Pandemia e dentro das possibilidades do contexto da pesquisa, buscamos entender como os alunos se relacionavam antes e durante a pandemia e, se a convivência na perspectiva dos estudantes, poderia afetar o ensino e a aprendizagem escolar.

CONVIVÊNCIA ESCOLAR

A convivência nas escolas é um tema emergente das preocupações de educadores diante do cenário educacional. Os problemas de convivência nas escolas englobam uma variedade de conflitos e implicações. Dentre os problemas que têm sido mais destacados no campo educacional, nas últimas duas décadas, poderíamos mencionar a violência e os problemas de indisciplina escolar.

De acordo com Garcia (2009), os estudos sobre convivência na escola têm avançado em diversos países, incluindo o Brasil (DEBARBIEUX e BLAYA, 2002; ABRAMOVAY e RUA, 2004). Uma das principais fontes de motivação para esse avanço, entretanto, reside na intensidade e complexidade dos problemas de convivência que as escolas vêm experimentando. Tal como ocorre em relação a diversas outras questões relacionadas à escola, o debate sobre os problemas de convivência vem se destacando na literatura educacional à medida em que se intensifica a crise que eles representam.

Na literatura educacional, de acordo com Garcia (2013), a noção de convivência se encontra muito mais mencionada que realmente analisada teoricamente. Isso parece

refletir o modo como a convivência está representada nas escolas, não como uma dimensão a construir do tecido social e pedagógico das escolas, mas como algo a resolver (DIAZ-AGUADO, 2004; JARES, 2008; VINHA e TOGNETTA, 2008). Assim, é fundamental aprofundarmos este tema para melhor compreensão do universo da sala de aula, da aprendizagem e da prática do professor de Matemática. Os estudos sobre convivência na escola têm avançado em diversos países, incluindo o Brasil (DEBARBIEUX e BLAYA, 2002; ABRAMOVAY e RUA, 2004). Uma das principais fontes de motivação para esse avanço, entretanto, reside na intensidade e complexidade dos problemas de convivência que as escolas vêm experimentando. Tal como ocorre em relação a diversas outras questões relacionadas à escola, o debate sobre os problemas de convivência vem se destacando na literatura educacional à medida em que se intensifica a crise que eles representam.

É notório que a indisciplina em sala de aula é um problema velho e, é incorreto dizer que a indisciplina está apenas em escolas de países menos desenvolvidos, visto que relatos de problemas com indisciplina em escolas de países como EUA são constantes. Em nessa direção, de quem é a culpa? Como resolver esse antigo problema? Como preparar futuros professores para enfrentar tais situações?

De acordo com Garcia (2013), um motivo claro e constante é a falta de capacitação dos professores para lidar com grande parte dos conflitos presentes em sala de aula, como se o professor aprendesse a lidar com estes problemas na prática ou com a experiência, o que muitas vezes piora a situação. Outro problema comum é a falta de orientação pedagógica, que na maioria das vezes apresenta despreparo para lidar com conflitos de falta de disciplina. Nesse sentido, muitas escolas apresentam uma falta de preparo para lidar com situações de conflitos, e a falta de preparo às vezes, originam medidas precipitadas, que na maioria das vezes não são as melhores a serem tomadas.

Atualmente, vivenciamos muitas situações preocupantes de conflitos de falta de respeito e intolerância vem se tornando cada vez mais frequentes. A sociedade tem apresentado uma linha muito limítrofe de intolerância, impaciência e desrespeito. A falta de respeito é um problema de ética na cidadania, Garcia (2013), apresenta algumas pesquisas que revelam que a falta de respeito, é mal compreendida. Uma pergunta foi feita para muitos alunos a respeito de qual das duas infrações eram mais graves: desrespeitar um colega ou desrespeitar um professor. A resposta da maioria foi desrespeitar um professor, o que é incorreto no caso da questão imposta, já que o respeito deve ser dado a todos independentemente de quem for, ou seja, falta de respeito é falta de respeito.

Muitas medidas vêm sendo tomadas para flagrar ou inibir os conflitos, uma delas são as câmeras em sala de aula, assim como policiamentos frequentes etc. Porém as punições, não são tão eficazes como o esperado, já que mesmo com todas as medidas que vem sendo tomadas, problemas de bullying, de indisciplina e diversos outros conflitos sociais negativos continuam existindo. Isso dá indícios de que medidas punitivas não são resolutivas destes problemas.

A falta de preparação dos professores e profissionais da educação para conflitos de violência, deve-se à falta de preparo na formação inicial, orientações com embasamento psicológico para saber como agir em determinadas situações. Então, como formar cidadãos? Conforme Nogueira (2000, p. 5):

> A educação para a cidadania requer muito mais do que a simples criação de oportunidades de participação dos alunos em alguns eventos proporcionados pela escola, porém este pode ser um começo. Pode ser um ponto de partida para um envolvimento maior com o espaço público e uma possível identificação com o mesmo. Para que haja uma educação de cidadãos, é preciso que acima de tudo os indivíduos, vistos como iguais, tenham a oportunidade de dialogar, expor seus anseios, necessidades e opiniões para que a escola passe a ser vista como local de troca, de relacionamento interativo, e não de imposições e regras, que muitas vezes não condizem com sua realidade.

Embora as pesquisas feitas ultimamente mostrem que a indisciplina em sala de aula não tem representado aumento, é muito comum ficar sabendo de conflitos envolvendo alunos e profissionais atuantes de uma escola ao conversar com alguém do convívio escolar. Além disso, pesquisas revelam que grande número de professores alunos e demais pessoas que trabalham ou estão nas escolas acham que a violência e a intolerância entre os alunos vêm crescendo cada vez mais.

Garcia (2013), aponta que com estas opiniões, grande parte dos professores se consideram inaptos para lidar com as questões de conflitos entre os alunos e 77,7% dos professores do ensino médio se demonstraram desmotivados com sua profissão devido ao comportamento de seus alunos, 76% dos profissionais escolares acreditam que conflitos entre estudantes vem se resolvendo de forma cada vez mais agressiva.

Para o autor, como resposta as atitudes indisciplinadas dos alunos, diversos professores apresentam medidas variadas para resolver problemas sendo estas chamar a atenção, ignorar, expulsar, gritar, dar notas baixas entre outras, porém estas medidas se mostram cada vez menos eficazes tendo em vista que mesmo assim, a indisciplina continua existindo. Outros professores acreditam que o número de contratação precisa crescer nas escolas, com medidas como policiamento, psicólogos e reuniões de conscientização de pais e alunos precisam ser feitas para diminuir este problema. Tratando os conflitos entre os alunos como um problema externo ao ambiente escolar, e não sendo algo de responsabilidade dos profissionais que lidam com os alunos.

As formas de lidar com as indisciplinas variam muito de professor para professor, quando o conflito é entre um aluno e um professor medidas punitivas mais severas tendem a ser tomadas sendo essas medidas desde encaminhar o aluno infrator a direção até em casos mais graves o conflito pode ser levado as autoridades policiais.

Quando o conflito ocorrido em sala de aula acontece de aluno contra aluno as medias de punição costumam ser mais leves, os professores tendem a deixar mais de lado, dando a entender que quando a agressão (seja ela física ou verbal) ocorre entre eles ela

é mais tolerável. Desta forma as crianças entender que o respeito tido entre si no quesito a respeitar um ser humano, não precisa ser o mesmo quando se trata de um colega, os levando a lidar com os problemas sociais de forma incorreta.

De acordo com Garcia (2013), um estudo feito entre crianças e adolescentes revelou três tendências em lidar com conflitos sociais de igual para igual sendo elas a assertividade, a agressividade e a submissão. No assertivo há o enfrentamento da situação, porém de forma errada já que o aluno costuma expressar seus sentimentos de forma agressiva sendo esta agressão física verbal ou até psicológica. O assertivo tem uma característica de enfrentar a situação de uma forma a exigir seus próprios direitos sem invadir o do próximo, já que uma pessoa com pensamento assertivo tende a valorizar o direito do próximo sem abrir mão dos próprios. Já o comportamento de submissão não há enfrentamento de situação sendo que a atitude mais comum é o desvio ou a fuga da situação, ficar quieto em um canto, isolado. A pessoa submissa leva em consideração os sentimentos do próximo, porém renuncia os seus próprios. Também existem as reações mistas em que os jovens tem atitudes seguidas de submissão e agressividade o que mostra uma série de atitudes erradas de lidar com problemas presente nos jovens brasileiros.

A INVESTIGAÇÃO

A presente pesquisa de cunho qualitativo, sob uma perspectiva exploratória e teórica (PATTON, 1990), pautou-se em duas etapas, em fundamentação teórica (levantamento de fontes e materiais bibliográficos), tendo como foco nesta etapa, a caracterização das representações relacionadas ao conceito de convivência em aulas de Matemática, de acordo com a literatura educacional contemporânea, e, em uma segunda etapa, aplicação de questionário aos estudantes do 8º ano do ensino fundamental (turma em que o pesquisador ministra aulas de Matemática) relativa ao tema sob investigação com o intuito de identificar as percepções dos alunos sobre a convivência escolar. Vale ressaltar que, os estudantes investigados se constituem na turma do pesquisador, primeiro autor do presente artigo.

Devido à pandemia, a pesquisa de campo teve que ser adaptada ao formato *on line.* Assim, com o objetivo de entender o posicionamento dos alunos em relação ao assunto pesquisado, foi elaborado e aplicado um questionário objetivo via Google Formulário, contendo dez perguntas. As questões foram dirigidas a uma turma com 16 (dezesseis) estudantes do oitavo ano do ensino fundamental II. Dois alunos dessa turma não possuíam acesso à internet e por isso não puderam participar da pesquisa e dos 14 (catorze) estudantes, apenas a metade respondeu o questionário, os outros não se sentiram à vontade para responder. Deste modo, tivemos efetivamente 07 (sete) estudantes participantes da pesquisa.

Apresentamos, a seguir, cada questão na ordem em que foram distribuídas no questionário e do posicionamento dos estudantes.

Em relação à primeira questão: *A pandemia afetou sua interação com colegas e professores?* 3 (três) dos entrevistados responderam que sim, 2 (dois) responderam que não e outros 2 (dois) responderam que raramente ou poucas vezes a interação foi prejudicada. As respostas dos estudantes apontam que a maioria teve a interação afetada pelo distanciamento provocado pela pandemia.

É notório que a falta de interação entre professor e aluno pode prejudicar a afetividade, que é uma peça importante no desenvolvimento humano. Para PIAGET apud CUNHA (2000), o desenvolvimento cognitivo advém da interação entre a criança e as pessoas com quem ela mantém contatos regulares, no caso da escola, o estudante e os professores.

Nota-se que, as interações no âmbito escolar, facilitam o desenvolvimento cognitivo, possibilitando uma maior aprendizagem. O ambiente pandêmico em que o Brasil e o mundo têm vivido, têm contribuído para uma deficiência afetiva e consequentemente, traz implicações no processo de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido, de acordo com SÊNIOR (2020), é necessário fortalecer os laços e vínculos com os estudantes possibilitando garantir o processo de aprendizagem.

Em relação à questão 2: *Você tem procurado ajuda de seus colegas e professores no período da pandemia?* 6 (seis) responderam não e 1 respondeu "Sim, com frequência." Isto reflete o obstáculo do distanciamento na relação pedagógica. As aulas remotas fizeram com que alunos e professores ficassem mais distantes. Embora na atualidade as ferramentas tecnológicas facilitem a comunicação, o contato entre professor e aluno, conforme observações de nossa prática, certamente foi prejudicado, pois as aulas realizadas de forma remota diminuíram a participação dos estudantes durante as aulas. Com relação a este dado, a pesquisa aponta para a redução da procura do estudante pelo professor, possibilitando um possível prejuízo, pois a interação entre ambos é indispensável no processo de ensino e de aprendizagem.

De acordo com Freire (2008, p.86), "o fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve". No entanto, durante as aulas via Google Meet, considerando as respostas e a observação realizada pelo pesquisador, verificou-se que a participação dos estudantes foi muito pobre e muitos comentários que poderiam enriquecer a aula, foram perdidos.

Quanto à questão 3: *O uso de tecnologias tem facilitado sua aprendizagem*? Apenas 3 (três) responderam sim, 1 (um) respondeu que auxilia poucas vezes e outros 3 (três) responderam que não, a tecnologia não facilitou sua aprendizagem. O intuito dessa pergunta foi entender a relação da tecnologia e aprendizagem, procurando buscar indícios do seu uso na comunicação com seu professor e colegas. Diante das respostas, constatamos que a maioria dos estudantes não percebe a tecnologia como aliada na aprendizagem. Isto se deve ao fato de que as ferramentas tecnológicas modificam a forma de ensinar e de

aprender e as relações travadas entre os atores do processo, pois alteram a forma como determinada tarefa é realizada e a sociedade ainda está se adaptando a elas.

Com a pandemia, a educação foi forçada a adaptar-se com recursos digitais de forma muito rápida. De acordo com Santaella (1997), as tecnologias não são apenas aparelhos, equipamentos, não é puro saber-fazer, é cultura que tem implicações éticas, políticas, econômicas e educacionais.

Em relação à questão 4: *A forma de ensino remoto te faz sentir sem amigos?* 3 (três) responderam "às vezes", 2 (dois) responderam sim e 2 (dois) disseram não. Aqui observamos que apenas dois estudantes afirmam que a forma de ensino remoto não os fez sentir sem amigos, portanto o restante apresentou indícios de que o distanciamento trouxe algum sentimento de perda, falta de interação. A questão 5: *Como era sua interação com seus colegas antes do período de pandemia?* Buscava compreender e comparar as relações antes e durante a pandemia, ou seja, relação presencial versus remota. De acordo com as respostas dos estudantes, 4 responderam ótima e 3 razoável. Ninguém marcou a alternativa "péssima". Aqui podemos identificar que as relações dos estudantes eram na média boas, mas em contraposição às questões anteriores identificamos que o distanciamento alterou essas relações.

Quanto à questão 6: *Para você, o isolamento social afetou sua aprendizagem?* 4 (quatro) disseram não e 3 (três) responderam que sim. Aqui há uma divisão de opiniões, não é possível concluir, mas as respostas apontam que o isolamento social afetou grande parte dos estudantes. Na questão 7: *Você acha que atividades em grupo, tornam o conteúdo mais simples de ser entendido?* 85,7% disseram que sim e 14,3% disseram não. Estas questões podem remeter a indícios da importância da convivência escolar para a aprendizagem.

Já a questão 8: *Você já foi alvo de preconceito*?, teve por objetivo identificar possíveis conflitos existentes na sala de aula. Dos investigados, 4 (quatro) responderam nunca, 2 (dois) responderam "Sim, algumas vezes" e 1 (um) disse "sim, com frequência." Nesta questão identificamos um alto número de possíveis conflitos, se considerarmos o total de respondentes. Dos 7 (sete) investigados, 42,85% tem problemas de convivência na escola, fato que pode interferir na aprendizagem.

As questões 9 e 10, respectivamente*: Para você, as diferentes formas de Bullying, tornam o ambiente escolar menos prazeroso?, Para você, o Bullying pode afetar a aprendizagem?* 100% dos alunos responderam sim para ambas as questões, o que confirma o quanto é importante um ambiente tranquilo e o quanto a convivência escolar pode colaborar com a aprendizagem.

Para ter um bom desempenho escolar, conforme Lopes Neto (2005), é necessário que os estudantes se sintam bem na instituição de ensino pois, a escola é um espaço de convivência de grande significado, e os que não gostam dela têm maior probabilidade de apresentar desempenhos insatisfatórios, comprometimentos físicos e emocionais à sua

saúde ou sentimentos de insatisfação com a vida.

Assim, os alunos que não consideram o ambiente escolar prazeroso, correm risco de sofrer severos efeitos colaterais em seu desenvolvimento social e acadêmico. Dessa forma, a convivência escolar quando não é boa, pode acarretar grande prejuízo aos estudantes.

Fato é, que em inúmeras vezes, observamos em nossa prática que as manifestações de preconceitos ou bulling ou qualquer outro tipo de conflito são deixados de lado ou não é dada a devida atenção pela instituição de ensino e pelos profissionais envolvidos, fazendo com que aqueles que são excluídos pelos colegas se tornem cada vez mais esquecidos, acarretando possíveis problemas de saúde, além de outros problemas como desgosto pelo conhecimento, excessivo número de faltas e notas baixas. Dessa forma, é necessário, mais atitude vinda dos funcionários educacionais para enfrentar o empasse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa traz alguns apontamentos sobre o tema que poderão se constituir em reflexões interessantes para ponto de partida para outras investigações, em especial, para investigações em que a pesquisa de campo se dê presencialmente, pois o distanciamento não permitiu elucidar de forma mais adequada os elementos presentes no dia-a-dia da convivência dos estudantes a fim de identificar fatores recorrentes e soluções mais assertivas.

No entanto, podemos concluir que a convivência escolar e os conflitos decorrentes dela, segundo Garcia (2013), podem e devem ser úteis para o professor como uma forma de aproveitar a situação para que o aluno tenha uma espécie de enriquecimento social. Dentro de cada pessoa, há uma série atitudes pré-formadas que ela adquiriu com o tempo. As pessoas apresentam personalidades e visões de mundo diferentes, cada um é guiado pelos seus modos de ver e perceber as coisas que, invariavelmente, se opõe a do outro.

Ainda conforme Garcia (2013), dentro de uma criança também há uma séria de conflitos morais, éticos e emocionais que também se opõem um ao outro. Sendo assim o professor pode aproveitar a situação do conflito presente na escola, para auxiliar seus alunos a tomarem atitudes mais corretas. Este auxílio não pode ser uma indução, ele precisa ser uma reflexão.

Como exemplo, se uma discussão entre dois colegas se elevou a ponto da possibilidade de uma agressão, deve-se primeiro esperar que os dois jovens se acalmem o suficiente para poderem pensar, refletir e expor seus sentimentos. Quando eles estiverem mais calmos, pode-se questioná-los sobre suas atitudes, sobre qual melhor caminho para a resolução do problema. Este é um exemplo de um encaminhamento dialógico.

Uma outra forma de refletir sobre atitudes violetas entre os alunos, de acordo com Garcia (2013), é promover assembleias e reuniões falado sobre a importância de agir de formas mais eficazes em situações que estão gerando desavenças entre colegas. Assim, a

escola conseguirá fazer com que os alunos comecem a refletir sobre como devem agir nas situações que os incomodem. Na maioria das vezes as escolas não fazem com que seus alunos reflitam sobre suas atitudes, e assim quando o conflito aparece, eles costumam ser precipitados em atitudes ineficazes para resolver este problema.

A escola, para Garcia (2014), deve "vestir a camisa", pois problemas de conflitos gerados na convivência escolar fazem parte do dia a dia da nas salas de aula, e devem sim, ser trabalhados e, nessa linha, se os profissionais escolares admitirem que isso é assunto deles, conseguirão melhorar a convivência entre os estudantes. Infelizmente, o que vemos nas escolas, diante de conflitos é que faltam ações formativas para professores que proporcione melhores condições para enfrentar tantos desafios que encontramos no ambiente educacional. Em geral, percebemos que os professores vão tentando contornar intuitivamente as situações. No ambiente escolar, as indisciplinas, particularmente nas últimas décadas, teriam se tornado expressões usuais, rupturas com as quais os professores precisam conviver em sala de aula e o que ocupa um espaço considerável do currículo escolar.

Diante disso, podemos concluir que a investigação realizada apontou que elementos de uma boa convivência implica em melhor qualidade de ensino e de aprendizagem e que as saídas para conflitos de convivência escolar, encontram-se na própria escola. É necessário construir um projeto, que transforme o cotidiano escolar em um ambiente colaborativo e diferenciado, carregado de diálogo e gosto em aprender.

REFERÊNCIAS

CUNHA, Marcus Vinicius da. *Psicologia da educação*. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

FÁTIMA DE LIMA SÊNIOR. Maria. *Afetividade: Interação Entre Professores e Estudantes nos Novos Ambientes de Aprendizagem em Tempos de Pandemia.* João Pessoa-PB, 2020.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* 37. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2008. (Coleção Leitura).

GARCIA, J. *Indisciplina na Escola: uma reflexão sobre a dimensão preventiva*. Revista Paranaense de Desenvolvimento, Curitiba, n. 95, p. 101-108, jan./abr. 1999.

GARCIA, J. *A construção social da indisciplina na escola.* In: SEMINÁRIO DE INDISCIPLINA NA EDUCAÇÃO CONTEMPORÂNEA, 1, 2005. Curitiba. Anais... Curitiba: UTP, 2005. p. 87-93.

GARCIA, Joe; TOGNETA, Luciene Regina Paulino e VINHA, Telma Pileggi. *Indisciplina, Conflitos e Bulling na escola.* Campinas-SP, Mercado de Letras, 2013.

NOGUEIRA, I. *A violência nas escolas e o desafio da educação para a cidadania*. Trabalho apresentado na 23a. Reunião Anual da ANPED, Caxambú, 2000.

PATTON, M. Q. *Qualitative evaluation and research methods*. London: Sage, 1990.

RESTREPO, JAVIER Andrés Bruiles; PÉREZ, Hugo Esaú Molsave; Osorio, Tulio Eduardo Suárez. *Formácion Ciudadana em la Clase de Matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidad Pontificia Bolivariana. Escuela de Educácion y Pedagogia. Maestría en Educácion con Énfasis em Maestro: Pensamento –Formácion. Medellín, 2013.

FABIANOVICZ, Ana Cristina. *Transformando a Convivência Escolar através da prática pedagógica do diálogo restaurativo.* XII Congresso de Educação. Curitiba, Educere, 2015.

CAPÍTULO 6

AL-BIRUNI E A MATEMÁTICA PRÁTICA DO SÉCULO XI: UM ESTUDO SOBRE ALGUMAS DE SUAS CONTRIBUIÇÕES

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 20/01/2022

Francisco Neto Lima de Souza
Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN)
Natal – Rio Grande do Norte
https://orcid.org/0000-0001-5340-8630

Giselle Costa de Sousa
Professora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Departamento de Matemática
Natal – Rio Grande do Norte
https://orcid.org/0000-0003-0213-4179

RESUMO: No itinerário do primeiro milênio o mundo concentra os seus olhos nas terras islâmicas. Uma era de descobertas estava acontecendo em função da aplicação de novas teorias a conhecimentos antigos que abriu oportunidade para uma era de conhecimento, experimentação, criação e gerência de novos saberes, preparando assim, um cenário de iluminação intelectual marcado principalmente pela discussão da sabedoria convencional. Tais terras contam, nesse sentido, com a contruibuição de muitos islâmicos com um desejo produzir conhecimento, e entre esses, surge um estudioso justificadamente com representatividade na História. Al-Biruni, se destingue pelas suas habilidades e sua contribuição nas mais variasdas áreas de conhecimento, contando com a produção em áreas como: Astronomia, Matemática, Geografia, Religião e Ciência. Sua colaboração nos remota as miríades de conhecimentos científicos resultados de seus trabalhos e remete a um cenário que renasce como uma inspiração para todos os que seguem e estudam seu trabalho hoje. Nesta ótica, o presente estudo apresenta seus traços biográficos associados a suas contribuiçoes científicas, como fruto uma pesquisa histórica de caráter bibliográfico.

PALAVRAS-CHAVE: Al-Biruni. Matemática Islâmica. História da Matemática.

AL-BIRUNI AND THE PRACTICAL MATHEMATICS OF THE 11TH CENTURY: A STUDY ON SOME OF ITS CONTRIBUTIONS

ABSTRACT: In the course of the first millennium, the world focuses its eyes on the Islamic lands. An era of discoveries was happening due to the application of new theories to old knowledge that opened the opportunity for an era of knowledge, experimentation, creation and management of new knowledge, thus preparing a scenario of intellectual enlightenment marked mainly by the discussion of conventional wisdom. Such lands count, in this sense, with the contribution of many Muslims with a desire to produce knowledge, and among these, there is a scholar justifiably with representation in History. Al-Biruni stands out for its abilities and its contribution in the most varied areas of knowledge, with production in areas such as: Astronomy, Mathematics, Geography, Religion and Science. His collaboration takes us back to the myriad of scientific knowledge

resulting from his work and refers to a scenario that is reborn as an inspiration for all who follow and study his work today. In this perspective, the present study presents its biographical traits associated with its scientific contributions, as a result of a historical research of a bibliographic nature.
KEYWORDS: Al-Biruni. Islamic Mathematics. History of Mathematics.

1 | INTRODUÇÃO

As contribuições dos matemáticos islâmicos ajudaram exuberantemente no desenvolvimento da Matemática Ocidental, porém ainda há poucos registros desta colaboração na História da Matemática, além disso os que existem geralmente falam de uma forma superficial. Conforme levantamento bibliográfico, existe uma escassez quanto a livros de História da Matemática em português que tratem das contribuições islâmicas para o desenvolvimento da Matemática.

Segundo Scheppler (2006, p. 10),

> Para apreciar plenamente a origem e o progresso das artes e das ciências, devemos explorar a perspectiva histórica para estudar aqueles que vieram antes e prepararam o caminho para a descoberta científica futura. As disciplinas matemáticas como a álgebra e a trigonometria, por exemplo, são fundamentais para cálculos precisos no campo da astronomia. Ambas as disciplinas se originaram em terras Muçulmanas, mas sabemos mais sobre os estudiosos da Renascença que aplicavam as fórmulas do que os estudiosos muçulmanos que desenvolveu-as, o tempo está maduro para aumentar a nossa compreensão desta região fundamental do globo.

O trabalho em questão, propõe trazer à tona parte desta História dos que prepararam caminho para a constituição da Matemática, sobretudo, a partir dos fomentos astronômicos islâmicos. Como representante deste cenário, apresentamos uma análise da biografia de um matemático Islâmico, que se destacou pelo volume e pela relevância das suas produções, sendo uma das figuras mais marcantes dentro desse contexto, o Al-Biruni. Assim, procuramos conhecer a conjuntura em que ele estava inserido, de modo a investigar suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática.

Logo, o presente estudo se justifica pelo fato da parte da contribuição da Matemática Islâmica representar uma lacuna na História da Matemática, não sendo, ou sendo pouco conhecidos diversos estudos empreendidos por essa civilização e pelo fato de faltar, no corpo de conhecimento da História da Matemática, materiais que tratem da Matemática Islã, sobretudo, em Língua Portuguesa. Por serem muitas as possibilidades encontradas para seu estudo, foram realizadas pesquisas sobre essa Matemática, tendo em vista uma concepção mais ampla sobre essa temática.

2 | METODOLOGIA

Para entender a conjuntura metodológica do presente trabalho, faz-se necessário que entendamos os métodos e fundamentos utilizados para desenvolvê-lo. Neste sentido, esse estudo de fundamenta na importância das contribuições da História da Matemática no campo de pesquisa da Educação Matemática que se respalda numa pesquisa enquadrada como qualitativa.

Trata-se, pois, de uma pesquisa de caráter descritivo em que procuramos entender os fenômenos a partir do entendimento do contexto, de fato, de acordo com Oliveira (2008, p.2) "as noções teórico-metodológicas que estão presentes nesse tipo de pesquisa estão embasadas numa linha investigativa denominada de interacionista, que se diferencia da postura positivista no tratamento dos dados". Levando em consideração a questão subjetiva, a pesquisa qualitativa, consegue entender e analisar os problemas e objetos de estudos do mundo social de forma mais crítica, oportunizando estudar o ser humano, suas relações sociais e os fenômenos que o cercam, nos mais diferentes ambientes e a aspectos. Portanto, não nos limitamos a narrar fatos relativos a Al-Biruni, mas descrevê-los, sobretudo, imersos em seu contexto.

Como bem coloca Godoy (1995, p. 21) "a abordagem qualitativa oferece três diferentes possibilidades de se realizar pesquisa: a pesquisa documental, o estudo de caso e a etnografia". Os estudos que encaminham a pesquisa em questão, se baseiam no tipo de pesquisa conhecida como qualitativa do tipo documental com vertente para as contribuições dessa personalidade para a Matemática. Essa, passa a ser o foco do trabalho a partir do momento em que fazemos, da análise de documentos, incluindo manuscritos de suas obras, que compõem acervo, inclusive bibliográfico, como a principal fonte de informação da pesquisa. Deste modo, adotou-se o seguinte percurso metodológico, a saber:

Como tratado, a pesquisa em questão traz um levantamento da biografia do matemático islâmico Al-Biruni. Para tanto, realizamos a tradução de uma obra já publicada em inglês e com o título *AL-BIRUNI Master Astronomer and Muslim Scholar of the Elevery Century,* do Bill Scheppler (2006). Em seguida, usamos essa versão traduzida para fazer um cruzamento com as informações de uma biografia já delineada encontrada no *Mathematical MacTutor History of Mathematics Archives*, organizado pela *School of Mathematical and Computational Sciences da University of St Andrews*. Nesse sentido, o objetivo centra-se na perspectiva de construção de uma biografia mais embasada e com vistas a detalhar ainda mais suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática, especialmente disponibilizando material em língua portuguesa. Como resultado, segue biografia. Em paralelo, documentos que remetem a informações sobre sua contribuição para a ciência foram consultados, incluindo página de bibliotecas e museus, a fim de complementar informações sobre sua colaboração particularmente no âmbito da matemática relacionada

com outras áreas de conhecimento de modo que, a posteriori, outros estudos relativos ao tema sejam aprofundados.

3 | DESENVOLVIMENTO: BIOGRAFIA DE AL-BIRUNI E SUAS CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS

Em 15 de setembro de 973, Abu Raihan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni nasceu em uma região adjacente ao Mar de Aral, conhecida como Karakalpakstan, nos arredores de Kath. Hoje a cidade onde ele nasceu é chamada de Biruni em homenagem a esse grande estudioso. Al-Biruni nasceu de uma família muçulmana xiita de meios modestos, originalmente do Tajiquistão na Ásia Central, a oeste da China. Pouco se sabe com certeza sobre a educação de Al-Biruni porque ele não era de família influente e não deixou escritos autobiográficos, mas o que podemos extrair das fontes disponíveis é que Al-Biruni, em uma idade muito jovem, já desenvolveu trabalhos relevantes, orientado pelo astrônomo e matemático Abu Nasr Mansur. Com a idade de dezessete anos, Al-Biruni estava envolvido em trabalhos científicos sérios, por exemplo, em 990, com 17 anos ele calculou a latitude de Kath observando a altitude máxima do sol.

Estudiosos debatem sobre a origem do nome de Al-Biruni. Os nomes árabes são rótulos descritivos que fornecem informações sobre a linhagem ancestral de uma pessoa, sua ocupação ou a região da qual eles se originaram. Nesse sentido, Biruni é uma palavra persa que significa “estranho”. Usada normalmente para estrangeiros, seu uso é incomum como um nome. Al-Biruni recebeu seu nome completo no nascimento e “Biruni” foi dado a sua família quando eles emigraram do Tajiquistão. Uma teoria sugere que quando Al-Biruni chegou ao Kath, de sua região nativa, prosseguiu sua educação apresentando destaque que o separou de outros estrangeiros (*birun*, e os cidadãos de Kath se referiam a ele como “o estrangeiro”).

Além de estudioso, Al-Biruni era um muçulmano, cuja concepção religiosa alimentou sua busca pelo conhecimento e construiu seu trabalho em torno da sua fé. Seu trabalho começa com a análise de teorias existentes, procurando sempre refutar as que iam contra os ensinamentos do Alcorão, Al-Biruni acreditava que esse deveria ser o objetivo de todos os muçulmanos. Ele ainda considerava que, as descobertas entorno dos fenômenos o aproximava de Deus, vendo, dessa maneira, o caminho para entender Deus como um processo metódico. A integração da ciência e da religião alimentou uma série de contribuições, de modo que o foco religioso de Al-Biruni o influenciou em algumas de suas conclusões. Assim, a aptidão de Al-Biruni para aprender que é inspirada na fé e a sua paixão pelo conhecimento e pavimentam um caminho de muitas descobertas.

Al-Biruni ganhou sua reputação enquanto estudioso nato rapidamente, em 990 ele foi convidado a estudar sob o patrocínio de Abu Nasr Mansur ibn Iraque (970-1036), sendo essa, a primeira figura conhecida por ter desempenhado um papel fundamental no

desenvolvimento educacional de Al-Biruni. Abu Nasr Mansur ibn Iraque era três anos mais velho do que Al-Biruni, mas seu *status* real como príncipe da dinastia de Banu iraquiana proporcionou-lhe uma educação mais formal junto a professores mais estabelecidos, o que pela falta de condições Al-Biruni não teve. O estudioso mais velho desenvolveu um profundo respeito pelo Al-Biruni e provavelmente o viu como um acadêmico igual, se não um mestre. Ele dedicou seu primeiro livro a Al-Biruni em 997.

A vida em Kath foi satisfatória para Al-Biruni, e ele provavelmente teria ficado lá, após995, se ele não fosse forçado a fugir em função de conflitos políticos. O final do século X e início do século XI foi um período de grande agitação no mundo islâmico, as guerras civis na região em que Al-Biruni estava vivenciando, força um período de grandes mudanças na vida de Al-Biruni.

Al-Biruni nasceu em uma região dividida. A região de Khwarizm foi dividida verticalmente ao longo do caminho do rio Oxus, com cada lado sendo governado por uma dinastia independente e intransigente. Khwarazm era nesta época parte do Império Samanid que era governado por Bukhara. Um reino que estava rapidamente aumentando de influência foi o Ghaznavids, cuja capital estava em Ghazna no Afeganistão, um reino que deveria desempenhar um papel importante na vida de Al-Biruni.

Os Banu iraquianos eram os governantes da região de Khwarazm e Abu Nasr Mansur, o professor de Al-Biruni, era um príncipe dessa família. Em 995, Abu Ali Mamun bin Muhammad concretizou um golpe que resultou no assassinato de Abu Abd Allah da família Banu iraquiana. As lutas de poder entre dinastias resultaram no início de uma guerra civil. Al-Biruni fugiu do início da guerra, não se sabendo o que aconteceu com o professor Abu Nasr Mansur nesta fase.

Esse momento de instabilidade marca o término de uma de suas primeiras obras mais importantes, um breve tratado intitulado *Cartografia*, em que Al-Biruni descreve cálculos para projetar hemisférios do globo no plano. Esse estudo permitiu posicionar com precisão as localizações das cidades com relação a sua latitude, e a partir de então, estava prestes a inventar o que se tornaria o mapa moderno. A conquista de Mamunid parou o trabalho de Al-Biruni. Como um membro do tribunal da família dominante e um associado direto ao príncipe Abu Nasr Mansur no Iraque, Al-Biruni temia que sua vida estivesse em perigo. Após seis anos sob o patrício da dinastia de Banu iraquiana, ele fugiu de Kath e deixou para trás toda a região de Khwarazm.

Não se sabe qual o destino de Al-Biruni quando ele fugiu de Khwarazm. Considera-se que Al-Biruni vagou, por um breve período de tempo após sua partida de Khwarizan, enquanto considerava um local para sua próxima residência. Interessado em continuar seus estudos em Astronomia, as opções de Al-Biruni se reduziram aos três centros de Astronomia da época; Khwarizm, Bagdá e Rayy. Khwarizm, era uma opção fora de cogitação por motivos já mencionados, Bagdá era muito distante, então sobrou como opção tentar se estabelecer em Rayy. Porém, Al-Biruni ainda não era conhecido o suficiente fora do

Kath para ser aceito como Astrônomo em Rayy. Sobrando para ele momentaneamente a pobreza.

Em Rayy existia um famoso astrônomo da época chamado Al-Khujandi, ele trabalhava com um instrumento muito grande que ele havia construído na montanha acima de Rayy para observar trânsitos meridianos do sol perto dos solstícios. A partir disso ele pôde fazer várias observações, em 16 e 17 de junho de 994, para o solstício de verão, e 14 e 17 de dezembro de 994, para o solstício de inverno. A partir desses valores, ele calculou a obliquidade da eclíptica e a latitude de Rayy. Al-Khujandi discutiu essas observações e seu grande sextante com Al-Biruni, que mais tarde relatou sobre eles em sua obra *Tahdid*, onde afirmou que a abertura do sextante estava imprecisa, devido ao peso do instrumento. Al-Biruni estava correto ao identificar a causa dos erros de Al-Khujandi.

Após refutar resultados imprecisos de Al-Kahujandi na determinação das Coordenadas de Posições para a Correção de Distâncias entre as cidades, Al-Biruni desfruta de um questionamento certo, e por isso, sua situação financeira muda em razão do reconhecimento dos méritos de seu trabalho, ganhando agora o patrocínio na corte de Al-Dawla. Em 997, dois anos depois, Al-Dawla morreu, e novamente Al-Biruni é negado pelo seu sucessor, porém agora um astrônomo já conhecido na região, chama a atenção dos sultões regionais.

Durante sua permanência no tribunal de Ibn Mansur, Al-Biruni conheceu Shams al Maali Bin Qabus. Bin Qabus, também, era um erudito e renomado autor ficando bastante impressionado com o intelecto e a paixão pelo conhecimento de Al-Biruni. Em 998, após a última rejeição de Al-Biruni pelo tribunal de Rayy, Bin Qabus se recuperou do conflito sobre Gorgan. Após seu reestabelecimento, Bin Qabus chama Al-Biruni para estudar sobre seu patrocínio e a partir desses momentos Al-Biruni se encontra novamente em condições ideais de estudo. Após dois anos, ele publicou uma de suas obras mais importantes, *The Chronology of Ancient Nations*, dedicando-a ao seu patrono. Al-Biruni aproveita mais um período de segurança financeira, e dá continuidade a seus estudos. Nesse período Al-Biruni publica pelo menos mais um livro em homenagem ao Bin Qabus, dessa vez intitulado *Treatise on the Skies iRisalah Tairid al Sha'at.*

Al-Biruni estava prosperando longe de sua terra natal, mas uma mudança de regime político em Khwarizm o fez repensar seu exílio e Abu al-Hasan Ali cortejou seu retorno. Al-Hasan Ali foi um líder efetivo que sustentou a força dos Mamunids e teve uma grande consideração pela educação, e em particular pela Matemática, fazendo da sua região, um centro de aprendizagem em geral. Al-Biruni foi um homem de natureza muito competitiva. Ele estudou várias obras de dezenas de estudiosos, mas nunca aceitou suas conclusões de imediato. Ele discutiu com seus contemporâneos usando de uma arrogância que às vezes limitava o confronto.

Em 1004, Al-Biruni estava prosperando sob o patrocínio de Shams al-Maali bin Qabus em Gorgan, desfrutando de uma existência confortável no tribunal de Bin Qabus,

mas o conforto pode não ter sido suficiente para o estudioso ambicioso. Quando Al Hasan Ali chegou, ele ofereceu mais do que apenas uma posição em seu tribunal, ele ofereceu a chance de Al-Biruni para se provar o líder em seu campo.

Em 4 de junho de 1004, Al-Biruni estava de volta à sua pátria, Al-Biruni deixa Gorgan para se juntar ao tribunal de Abu'l Abbas Ma'mun, em Khwarizm, O tribunal empregou especialistas em vários campos, nesse sentido, Al-Biruni completa o grupo com seu foco principal na Astronomia. A excelente equipe de estudiosos gerou uma riqueza de tratados para seu patrono e sua associação foi única na história.

Em 1004, Abu'l Abbas Ma'mun era governante e forneceu um apoio generoso para o trabalho científico de Al-Biruni. Não só Al-Biruni trabalhou lá, Abu Nasr Mansur, seu ex-professor também, permitindo que a dupla renovasse sua colaboração. Com o apoio de Abu'l Abbas Ma'mun, Al-Biruni construiu um instrumento em Jurjaniyya para observar os trânsitos do meridiano solar e ele fez 15 observações com o instrumento, entre 7 de junho de 1016 e 7 de dezembro de 1016.

A equipe de estudiosos de Khwarizm ainda estava intacta em 1009 quando Al Hasan Ali morreu e seu irmão Abu al-Abbas assumiu o poder. Al-Abbas prometeu continuar as políticas de Al-Hasan Ali, mas ele não possuía o efetivo de habilidades de liderança de seu irmão, assim, os dias das dinastias de harmonia Mamunid foram contados. Al-Abbas não conseguiu manter relações amigáveis com Al-Suhayli, que seria até então o ministro da corte, e como resultado, em 1013, o ministro partiu para Bagdá. Nesse sentido, Al-Biruni, fica como substituto, assumindo responsabilidades consultivas e aumentando em influência política. Esse movimento, fez com que o grupo fosse agitado, os estudiosos que constituíam o grupo, como por exemplo Ibn Sina e Abu Sahl Masihi, reagiram negativamente a saída de Al-Suhayli, saindo do grupo também.

Tensões políticas entrono de Khwarizm, levaram em 1017, soldados insubordinados liderados por Alaptgin Bukhari atacarem e mataram Al-Abbas, fazendo com que o seu trabalho fosse destruído. O ambicioso Mahmud, lider dos Ghaznavid, viu na situação uma oportunidade para assumir o controle de Khwarizm. Mais tarde naquele ano, ele lançou uma conquista bem-sucedida sobre Khwarizm, em 3 de julho de 1017.

Após sua conquista, Mahmud levou os três estudiosos restantes, Al-Biruni, Abu Nasr Mansur ibn Iraque e Al-Khayr Khummar, para o tribunal em Ghaznah, que está localizado no atual Afeganistão. Al-Biruni mais tarde notou os detalhes da queda de Abu Al-Abbas e a transferência de poder para Mahmud em seu livro *The Revolution of Khwarizm.*

Al-Biruni foi levado como espécie de prisioneiro de guerra do tribunal de Mahmud, sendo detidos na capital de Mahmud, Ghaznah. Al-Biruni, foi abraçado com uma adição valiosa ao reino de Ghaznah e foi encorajado a estudar, sobre o patrocínio de Mahmud. Durante dois anos, não temos registro de Al-Biruni viajando fora da Ghaznah, o que pode ser uma indicação de sua detenção.

Al-Biruni ficou preso em Ghaznah de 1018 a 1020, ele continuou a ganhar exposição

com novos conhecimentos e ideias, e aproveitou esse tempo para se dedicar ao sânscrito - a linguagem escrita da Índia e dialetos indianos - que se tornaria instrumental em seus futuros estudos, tendo em vista a sua condenação ao erro humano em versões traduzidas.

Al-Biruni encontrou inspiração em Ghaznah. Ao estudar as teorias científicas da Índia, Al-Biruni reconheceu um conjunto de conhecimento inexplorado, que ele viu como um veículo para o seu trabalho inovador. Em expedições entre 1020 e 1029 na Índia, mais precisamente focadas na região noroeste do país, Al-Biruni estudou a cultura, a religião, o meio ambiente, a literatura e a teoria científica do país em primeira mão, aproveitando a oportunidade para documentar sua pesquisa em seu *livro A History of India (Tarikh al-Hind)*. Nessas expedições, Al-Biruni viu a oportunidade de desenvolver ainda mais seus estudos, e firmou fortes laços com estudiosos durante o seu percurso, continuando seus estudos através de correspondências.

Al-Biruni permaneceu no tribunal de Mahmud durante treze anos, sendo esse um período muito próspero em seus estudos. Em 1030, com a morte de Mahmud, Ghaznavid vive um breve período de turbulência em decorrência da alternância de poder, após um golpe em 1031, Masud arrumou o controle do império para si, bloqueando seu irmão mais novo em uma prisão de Taginabad.

Al-Biruni, temeu que fosse libertado e fosse obrigado a procurar a sua independência em outro lugar, ele já estava com 58 anos e entre as suas escolhas ele preferia ficar e não interromper seus trabalhos que estavam em andamento, porém, Masud, um ávido astrônomo, teve um grande respeito pelo Al-Biruni e o encorajou a continuar seu trabalho sem pausa. Al-Biruni desenvolveu com Masud um relacionamento baseado em admiração mútua que ele não teve com Mahmud. Masud forneceu um ambiente que lhe permitiu dedicar seu tempo e energia completamente à busca do conhecimento. Como forma de agradecimento, Al-Biruni dedica sua principal obra *Astronomia e trigonometria* ao seu patrono. Al-Biruni escreveu outros livros para Masud como forma de educar o sultão sobre temas em que ele mostrou interesse.

Em 1039, a incerteza vem de novo na vida de Al-Biruni, eventos causam mais ansiedade para Al-Biruni, relacionados eventualmente a mudança de governo novamente, agora Ghaznah está sobre o comando de Mawdud, no entanto as coisas não mudaram muito para Al-Biruni com ele temia.

Esse tempo marca a finalização de alguns trabalhos, como por exemplo *Livro das Pedras preciosas, Livro de Regras*. Al-Biruni morre em 1048 e estuda até seu último suspiro, limitado pela falta de visão e perca da memória, porém, ainda nessas condições, ele conclui sua obra *Matéria Medica*, e pouco tempo depois o estudioso muçulmano faleceu.

Sábios do tempo moderno consideram que Al-Biruni tenha quase 200 obras publicadas. Destes trabalhos, poucos permanecem, a grande maioria se perdeu ao longo do tempo e muitos desses ainda se encontram em árabe, precisando ser levado em consideração também que um estudo detalhado sobre essas obras não foi finalizado.

Al-Biruni tinha uma aptidão diversificada. Provavelmente, as suas maiores contribuições são os seus extensos avanços em Astronomia e seus livros *The Chronology of Ancient Nations*, escrito em torno de 1000 d.C. e *A History of India (Tarikh al-Hind)*, concluído em 1030.

A Matemática desenvolvida por Al-Biruni, está principalmente ligada ao desenvolvimento de uma ferramenta para possibilitar o estudo de sua principal área de interesse, a Astronomia, pois é impossível mapear e rastrear os céus sem entender equações matemáticas. Al-Biruni teve que se tornar especialista em áreas como Aritmética, Álgebra e Geometria para começar a entender a Astronomia, dando a Matemática um caráter experimental e utilitarista.

Em seus escritos estão documentadas teorias avançadas em Matemática, principalmente em seu livro *Astronomia e Trigomometria (Al-Oanun al-Mas'udil).* Sua contribuição final para a Trigonometria, foi a idealização de equações matemáticas previamente desconhecidas que ele desenvolveu para medir a circunferência da Terra e explicar a rotação do planeta em seu eixo. O estudo de Al-Biruni em sua excursão pela Índia resultou em várias obras, dentre elas, oito livros sobre Aritmética, onde se encontram conceitos em Matemática, muitos dos quais anteriormente desconhecidos até então fora das fronteiras indianas.

Nesse sentido, o livro *Rozenfel'd* : BA, o MM *Rozhanskaya E zk Skolovskaya, Abu'l-Rayhan al.-Biruni* (973-1048) (russo) (São Petersburgo, 1973), traz as principais contribuições matemáticas de Al-Biruni mais detalhadamente, nesse rol, seus estudos abarcam: Aritmética teórica e prática, soma das séries, análise combinatória, a regra de três, números irracionais , teoria da relação, definições algébricas, método de resolução de equações algébricas, geometria, teoremas de Arquimedes, trisecção do ângulo e outros problemas que não podem ser resolvidos com régua e compasso sozinho, seções cônicas, projeção estereográfica, trigonometria, teorema do seno no plano e resolução de triângulos esféricos.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

São poucos os livros em português que tratam da História da Matemática do Islã medieval, e a escassez da abordagem das contribuições islâmicas para a Matemática nos fazem olhar para esse tema como potencial, hora para destacar as importantes contribuições do trabalho desses matemáticos de modo a contribuir para grande parte da Matemática que temos hoje, seja por hora para ter como inspiração a colaboração de vários desses mestres para quantificar e interpretar logicamente o mundo que nos cerca.

A partir do momento em que esse trabalho se propõe a tratar das contribuições do matemático islâmico Al-Biruni, vemos pela biografia deste, um exemplar um campo fecundo de estudo que nos abre várias perspectivas para o entendimento do conhecimento

matemático, de modo que podemos observar a Matemática enquanto saber construído pelo homem de maneira não-linear, num caminhar cheio de incertezas, intuições, tentativas, erros e acertos, e ainda conexões que seria uma das maiores discussões dentro da filosofia e filosofia da ciência.

Trabalhamos entorno da necessidade e da perspectiva de ser deixado alguma contribuição para o corpo de conhecimentos da História da Matemática do islã medieval na Língua Portuguesa, e como de fato fazemos, esse trabalho subsidia uma biografia mais completa do autor em questão, ao passo que foram incrementados na biografia do MacTutor aspectos da vida, das características e do trabalho do autor pesquisado, permitindo a construção de um conjunto de informações mais consistentes e completas acerca de Al-Biruni e seus trabalhos, consequentemente, a Matemática Islã.

REFERÊNCIAS

GODOY, Arilda Schmidt, **Pesquisa Qualitativa tipos fundamentais**, Revista de Administração de Empresas da Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, v. 35, n.3, p, 20-29 mai. /jun. 1995.

O'CONNOR. John J; ROBERTSON, Edmund F. **MacTutor History of Mathematics archive**. 1997. Disponível em:< http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Biruni.html>. Acesso em: 15 jul. 2017.

OLIVEIRA, Cristiano Lessa de. Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características. **Revista travessias do programa de pós-graduação em letras da UNIOESTE,** Paraná, v.2, n.3, 2008.

SCHEPPLER, Bill. **AL-BIRUNI Master Astronomer and Muslim Scholar of the Elevery Century.** New York: The Rosen Publishing Group, 2006.

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES DE CURVAS E ANIMAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 17/01/2022

Rosangela Teixeira Guedes
Mestrado em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Cornélio Procópio, Paraná
http://lattes.cnpq.br/6229392665915856

Marcos Felipe de Oliveira
Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Paraná
http://lattes.cnpq.br/2883513254095184

RESUMO: Este artigo tem por objetivo estudar curvas no plano e no espaço e suas aplicações. Para tanto, será realizado um estudo dos conceitos preliminares necessários da Geometria Diferencial. Em seguida, serão enunciados e demonstrados alguns resultados de curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet para curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet para curva não parametrizada pelo comprimento de arco, curvatura, torção e Teorema Fundamental das Curvas Planas. Com esse estudo, tornou-se possível desenvolver aplicações com comandos e animações no Software Geogebra sobre Vetor Tangente, Reparametrização da curva, Curva reparametrizada pelo comprimento de arco, Curva que caracteriza uma Hélice, Curvatura da Circunferência, Curvatura da Espiral Logarítmica, Curvatura máxima de uma Curva e o Teorema Fundamental das Curvas Planas.
PALAVRAS-CHAVE: Curva, Curvatura, Hélice, Aplicações.

CURVES AND ANIMATIONS APPLICATIONS WITH THE GEOGEBRA SOFTWARE

ABSTRACT: This article aims to study curves in the plane and in space and their applications. Therefore, a study of the necessary preliminary concepts of Differential Geometry will be carried out. Then, some results of curve parameterized by arc length, Frenet reference for curve parameterized by arc length, Frenet reference for curve not parameterized by arc length, curvature, torsion and Fundamental Theorem of Plane Curves will be stated and demonstrated. With this study, it became possible to develop applications with commands and animations in Geogebra Software on Tangent Vector, Reparametrization of the curve, Curve reparametrized by the arc length, Curve that characterizes a Helix, Curvature of the Circumference, Curvature of the Logarithmic Spiral, Maximum Curvature of a Curve and the Fundamental Theorem of Plane Curves.
KEYWORDS: Curve, Curvature, Helix, Applications.

1 I INTRODUÇÃO

A história da geometria diferencial começa com o estudo de curvas. Noções como retas tangentes a curvas já são encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e

Apolônio. O alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) descobrem os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitirão o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.

O estudo das propriedades locais de curvas consideradas na Geometria Diferencial serão definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes. A Geometria Diferencial consiste no estudo de propriedades geométricas de curvas e superfícies, por meio do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra linear.

Serão abordados resultados de curva parametrizada diferenciável, curva parametrizada pelo comprimento de arco, traço de curva, reparametrização de curva pelo comprimento de arco, referencial de Frenet, Hélice, Curvatura, torção e Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Animações com o auxílio do Software Geogebra de vetor tangente em um ponto da curva, reparametrização da curva regular que é circunferência de raio a, catenária parametrizada pelo comprimento de arco, curvatura de curvas, curvatura da Espiral Logarítmica, curva com curvatura máxima, dada uma função diferenciável como determinar a curvatura usando o Teorema Local de Curvas Planas e curva que caracteriza uma Hélice.

2 | RESULTADOS DE CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO E APLICAÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Definição 1: Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação $\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{I}\rightarrow\mathbb{R}^2$ que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t)=(x(t), y(t))$ em que x(t) e y(t) são funções diferenciáveis de classe C^∞.

A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva α e I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\alpha'(t)$, $t \in I$ é chamado traço da curva.

Definição 2: Seja $\alpha:I\rightarrow\mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t)=(x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t)=(x'(t), y'(t))$ é chamado vetor tangente da curva α em t.

Aplicação 3: (Cardioide e Vetor Tangente)

Seja $\alpha:I\rightarrow R^2$ a curva parametrizada diferenciável que para cada $t \in R$ associa $\alpha(t)=(\cos(t)(2\cos(t)-1, \sin(t)(2\cos(t)-1))$, tal curva é denominada Cardioide.

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que num ponto qualquer P do Cardioide existe o vetor tangente utiliza os seguintes comandos:

$$\alpha=Curva(\cos(t)(2\cos(t)-1),\sin(t)(2\cos(t)-1),t,-10,10)$$

Controles deslizantes s e h de variações $-10 \leq s \leq -10$ e $0 < h \leq 1$ de incremento 0.0001. Digite na caixa de entrada os pontos $P=\alpha(s)$ e $Q=\alpha(s+h)$.

Trace a Reta tangente a P e a curva α e a reta secante pelos ponto P e Q.

A seguir, será construído o vetor tangente da curva α no ponto P.

$L=\dfrac{x(Q)-x(P)}{h}$ (em que x(Q) e x(P) representam as primeiras coordenadas dos

pontos P e Q).

$M=\frac{y(Q)-x(P)}{h}$ (em que y(Q) e y(P) representam as segundas coordenadas do ponto P e Q); *d*=*x*(*P*); *e*=*y*(*P*).

Inserir na caixa de texto: *x´*(*d*)-*L* e *y´*(*e*)-*M.* Editar na caixa de entrada:

x´(*d*)-*L* (Escolher este L na caixa de objetos)

y´(*e*)-*M* (Escolher este M na caixa de Objetos).

Vetor tangente = (L, M) **(Escolher na caixa de objetos)**

α=*Derivada*; (*α*); *A*=*α*(*s*); *O*=(0,0); $\vec{u}$ =*Vetor* (O, A) $\vec{v}$ =Transladar ($\vec{u}$,*P*);

B=*Transladar* (*P, v*); Vetor (*P*, *B*) (vetor tangente em P a curva *α*)

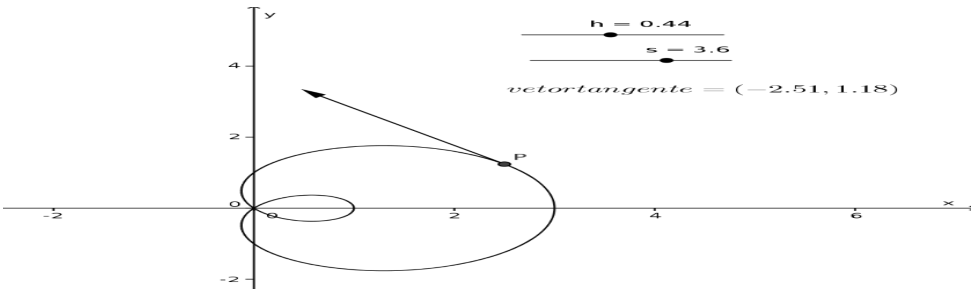


Figura 1: Cardioide e Vetor Tangente.

Fonte: Autoria própria.

Anime o controle deslizante s e observe que em qualquer ponto P do Cardioide existe o vetor tangente, de acordo com a Figura 1.

Definição 4: Sejam I e J intervalos abertos de ℝ, $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e h : J → I uma função diferenciável de classe C^∞, cuja derivada de primeira ordem é não- nula em todos os pontos de J e tal que h(J) = I . Então a função composta $\beta=\alpha\circ h: J\to\mathbb{R}^2$ é uma curva regular, que tem o mesmo traço de *α* que é chamada reparametrização de *α* por h .

A função h na Definição 4 é dita mudança de parâmetro. E a orientação de uma curva regular plana α é o sentido de percurso do traço de α .

Definição 5: Uma curva regular $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada t_0-t_1 ϵ *I*, $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a t_1-t_0, isto é,

$$s(t)=\int_{t_0}^{t_1}\|\alpha'(t)\|dt=t_1-t_0.$$

Proposição 6: Uma curva regular $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para todo $t\in I$, $\|\alpha'(t)\|=1$.

Demonstração: (⇒) Suponhamos que a curva α seja parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \epsilon I$. Seja a função *s* : *I* →ℝ, que para cada *t*ϵ*I* , associa $s(t)=\int_{t_0}^{t_1}\|\alpha'(\xi)\|d\xi$

então $s'(t)=\|\alpha'(t)\|$, para todo $t\in I$. Temos que $s(t)=t-t_0$ para todo $t\in I$, o que implica que $\|\alpha'(t)\|=s'(t)=1$, para todo $t\in I$. ($\Leftarrow$) Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular tal que $\|\alpha'(t)\|=1$, para todo $t\in I$. Para cada t_0 ,$t_1\in I$ tal que $t_0\leq t_1$ defina $s(t)=\int_{t_0}^{t_1}\|\alpha'(t)\|dt$ então $s(t)=t_1-t_0$ o que prova que a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 7: Seja $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s: I\to s(I)\subset\mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0. Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J=s(I)$ e $\beta=\alpha\circ h$ é uma reparametrização de α, onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Aplicação 8:(Circunferência) Consideremos a curva regular $\alpha:[0,2\pi)\to R^2$ definida por $\alpha(t)=(a\cos(t),a\,sen(t))$ em que α>0 é constante.

Pelos resultados da Definição 4, Definição 5, Proposição 6 e Proposição 7 determinamos a função h que é a função inversa da função comprimento de arco e esta função é dada $h:[0,2|a\pi)\to[0,2\pi)$ em que $h(s)=\frac{s}{a}$.

E a curva β a reparametrização da curva α por h é a curva

$$\beta(s)=(\alpha\circ h)(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right),a\,sen\left(\frac{s}{a}\right)\right).$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a circunferência α e sua reparametrização β tem o mesmo traço utiliza os seguintes comandos:

Controles deslizantes a e s de variações 0<α≤5 e $0\leq s\leq 2\alpha\pi$.

Digite na caixa de entrada a curva α e a função h:

$\alpha(t)=Curva(a\cos(t),a\,sen(t),t,0,2a\pi)$ e $h(s)=\frac{s}{a}$. .

Determine o ponto $A=\alpha(h(s))$ e habilite o rastro neste ponto. Anime o controle deslizante s, determinando o traço da curva α.

A seguir, digite na caixa de entrada a curva β:

$$\beta(s)=Curva\left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right),a\,sen\left(\frac{s}{a}\right),s,0,2a\pi\right).$$

Anime o controle deslizante s e observe que a curva $\beta(s)=(\alpha(h(s)))$ tem o mesmo traço que a curva α, de acordo com a Figura 2 e também pela Proposição 6 a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco.

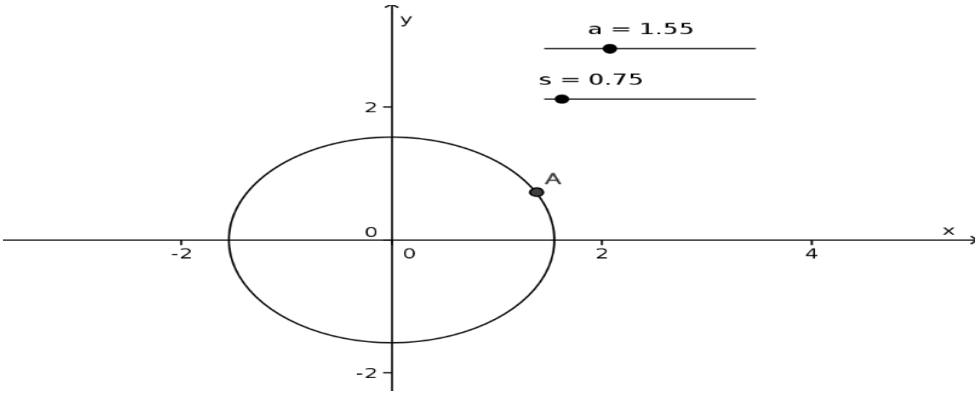


Figura 2: Reparametrização da Circunferência de raio a.

Fonte: Autoria própria.

A aplicação a seguir da Catenária que não é parametrizada pelo comprimento de arco.

Aplicação 9: (Catenária)

Seja $\alpha:[a,b]\to R^2$ definida por $\alpha(t)=(t,\cosh(t))$. A curva α não é parametrizada pelo comprimento de arco.

Alguns resultados de funções hiperbólicas: $\cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$; $senh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ $(\cos(t))'=senh(t)$; $\cos h^2(t)-sen\,h^2(t)=1$.

Assim, calculando a derivada da curva α temos que $\alpha'(t)=(1,senh(t))$ e a norma é dada por $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+sen\,h^2(t)}=\sqrt{\cos h^2}=\cosh(t)$.

O comprimento de arco da curva α é

$$s(t)=\int_a^b \|\alpha'(t)\|dt=\int_a^b \cosh(t)dt=senh(t)\int_a^b \square\, senh(b)-senh(a).$$

Pela Definição 5 como *s*(*t*)≠*b*-*a* então α não é parametrizada pelo comprimento de arco e o comprimento de arco da catenária é $s(t)=senh(b)-senh(a)$.

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a Catenária não é parametrizada pelo comprimento de arco utiliza os seguintes comandos: Controle deslizante a e b de variações -5≤*a*≤*b*,*a*≤*b*≤5.

Digite os comandos na caixa de entrada:

$$f(s)=s;\ \ \alpha=Curva(t,\cosh(t),t,a,b);\ \alpha'=Derivada(\alpha(t));\ g(t)=\sqrt{(1+(\sinh(t))^2)};\ e=b-a.$$

Anime os controles deslizantes a e b e observe que *s*(*t*) e *e*=*b*-*a* são diferentes, isto é, a curva *α* não é parametrizada pelo comprimento de arco.

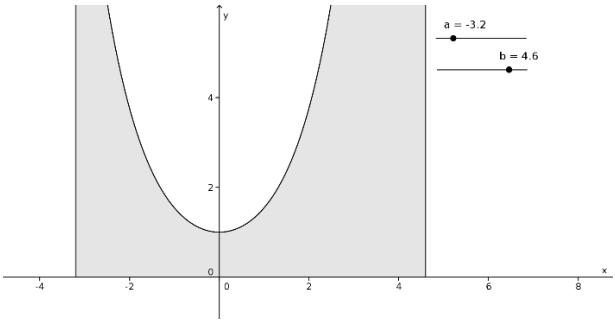


Figura 3: Catenária.

Fonte: Autoria própria.

Consideremos uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s)=(x(s), y(s))$, $s \in I$ reparametrizada pelo comprimento de arco. Assim, para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor tangente unitário, o qual denotamos por

$$t(s)=(x'(s), y'(s))=\alpha'(s)$$

e o vetor normal a curva α é o vetor unitário

$$n(s)=(-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto de vetores *t*(*s*) e *t*(*s*) é dito referencial de Frenet da curva α.

Proposição 10: Seja a curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s)=(x(s), y(s))$, $s \in I$ parametrizada pelo comprimento de arco e $\{t(s), n(s)\}$ o referencial de Frenet da curva α. Então os vetores *t´*(*s*) e *n´*(*s*) são paralelos aos vetores *n*(*s*) e *t* (*s*), respectivamente, e satisfazem as equações

$$t'(s)=K(s)n(s)$$

e

$$n'(s)=-K(s)t(s)$$

que são chamadas de fórmulas de Frenet da curva plana α e o fator de proporcionalidade *K*(*s*) é chamado de curvatura de α em s.

Demonstração: Por hipótese a curva α parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, ‖α ' (s)‖=1, para todo *s* ϵ *I* . Então ‖α'(s)‖=1, é ortogonal a *t* ' (*s*) e como t (s) é ortogonal a n(s) implica que t ' (s) é paralelo a n(s). Portanto,

$$t'(s)=K(s)n(s).$$

Além disso, $K(s)=\langle t'(s), n(s)\rangle=-x''(s)y'(s)+y''(s)x'(s)$.

Analogamente, como n(s) é unitário então n'(s) é ortogonal a n(s) e portanto n '(s) é paralelo a t (s). Assim, $\langle n'(s), t(s)\rangle=-x'(s)y''(s)+x''(s)y'(s)$, donde concluímos que $n'(s)=-K(s)t(s)$..

Agora, vamos considerar uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ regular de parâmetro $r \in I$ e

$\beta: J \to \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco s, isto é, $\beta(s(r))=\alpha(r)$, os vetores *t*(*r*) e *n*(*r*) referencial de Frenet da curva α e a curvatura é $K(r)=K(s(r))$.

A ideia de associar uma curva regular α ao movimento circular do vetor tangente unitário *t*(*s*) ou equivalentemente, do vetor unitário normal *n*(*s*) é devido a (Gauss, 1965), no início da geometria diferencial. Essa ideia tem um papel fundamental na teoria das curvas planas diferenciáveis.

Aplicação 11:(Curvatura da circunferência) Seja a aplicação $\alpha: R \to R^2$ definida por $\alpha(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right), a\,sen\left(\frac{s}{a}\right)\right)$ em que α≠0 é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, uma vez que $\|\alpha'(s)\|=1$ para todo $s \in R$, e a curvatura da curva α é $K=\frac{1}{a}$.

Primeiro vamos determinar o referencial de Frenet que são os vetores $t(s), n(s)$. Assim,

$$t(s)=(x'(s), y'(s))=\left(-sen\left(\frac{s}{a}\right), \cos\left(\frac{s}{a}\right)\right)$$

$$t'(s)=(x''(s), y''(s))=\left(\frac{-1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right), \frac{-1}{a}sen\left(\frac{s}{a}\right)\right)$$

$$n(s)=(-y'(s), x'(s))=\left(-\cos\left(\frac{s}{a}\right), -sen\left(\frac{s}{a}\right)\right)$$

$$K(s)=\langle t'(s), n(s)\rangle = \frac{1}{a}\cos^2\left(\frac{s}{a}\right)+\frac{1}{a}sen^2\left(\frac{s}{a}\right)=\frac{1}{a}.$$

As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura da circunferência de raio a utiliza os seguintes comandos:

Controles deslizantes: a e b com variações, 1≤α≤8 e -5≤b≤5.

Digite na caixa de entrada a curva α e a derivada da curva α:

$$\alpha(s)=Curva\left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right), a\sin\left(\frac{s}{a}\right), s, -5{,}5\right);\ \alpha'(s)=Derivada(\alpha)$$

e os pontos $P=\left(a\cos\left(\frac{b}{a}\right), a\sin\left(\frac{b}{a}\right)\right)$; $Q=\left(-\sin\left(\frac{b}{a}\right), \cos\left(\frac{b}{a}\right)\right)$; $O=(0,0)$ $L=\left(-\cos\left(\frac{b}{a}\right), -sen\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ e os vetores $u=Vetor(O,Q)$; $t=Transladar(u,P)(vetor\ t(s))$, $W=Vetor(O,L)$; $n=Transladar(w,P)(vetor\ n(s))$ a curvatura $K=Curvatura(P,\alpha)$;

$$n=Transladar(w,P)(vetor\ n(s))$$

$$\beta=Ângulo(t,n)$$

$$M=\left(\frac{-1}{a}\cos\left(\frac{b}{a}\right), \frac{-1}{a}\sin\left(\frac{b}{a}\right)\right);\ v=Transladar(v,P)\ \text{ e }\ K=t' * n(Curvatura)$$

Considere uma reparametrização de α dado por $\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{a}\right),-a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\right)$ então a curvatura da curva β é determinada por K= $\frac{-1}{a}$. Anime o controle deslizante a e observe que a curvatura da circunferência de raio a é K= $\frac{-1}{a}$, de acordo com a Figura 4.

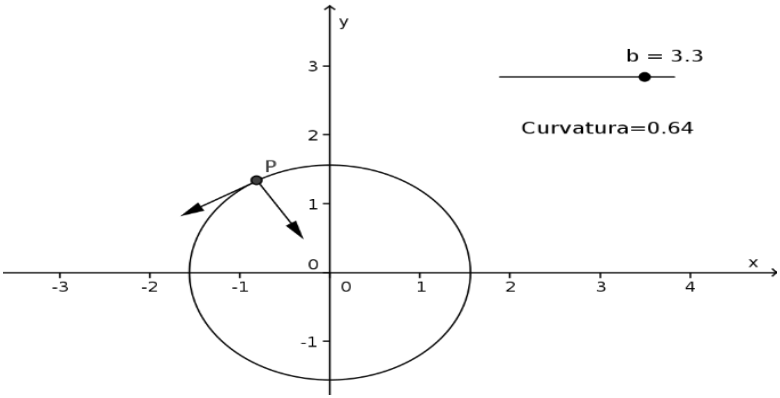


Figura 4: Curvatura da Circunferência de raio a.

Fonte: Autoria própria.

Observação 12: Os vetores do referencial de Frenet e a curvatura foram definidos para uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A proposição seguinte permite obter a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro, sem precisar reparametrizar a curva pelo comprimento de arco.

Proposição 13: Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular então

$$t(r)=\frac{(x',y')}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}},\quad n(r)=\frac{(-y',x')}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\quad \text{e}\quad K(r)=\frac{-x''y'+x'y''}{\sqrt{((x')^2+(y')^2)^3}}.$$

Aplicação 14: (Curvatura da Espiral Logarítmica) Seja a equação da espiral logarítmica $\alpha=\left(e^r\cos(r),e^r sen(r)\right), r\in R$. Então a curvatura é $K(r)=\frac{1}{\sqrt{2}e^r}$ e temos que $\alpha'(r)=\left(e^r\cos(r)-e^r sen(r),e^r sen(r)+e^r\cos(r)\right)$

$$\alpha'(r)=(0,0)\Rightarrow e^r\left(\cos(r)-sen(r)\right)=0\Rightarrow\cos(r)=sen(r)$$

e

$e^r\left(sen(r)+\cos(r)\right)=0\Rightarrow\cos(r)=-sen(r)$. Portanto a curva α é regular pois $\alpha'(r)\neq 0$ para todo $r\in R$. Assim, $\|\alpha'(r)\|=\sqrt{e^{2r}\left(\cos(r)-sen(r)\right)^2+\left(sen(r)+\cos(r)\right)^2}$

$= e^r\sqrt{\cos^2(r)-2\cos(r)sen(r)+sen^2(r)+sen^2(r)+2sen(r)\cos(r)+\cos^2(r)}$

$=e^r\sqrt{2\left(\cos^2 r+sen^2 r\right)}=\sqrt{2}e^r\neq 1, para\, todo\, r\neq\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Assim, para todo $r\in R$ tal que $r\neq\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e a curva α não é parametrizada pelo comprimento de arco $\|\alpha'(r)\|\neq 1$. As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura da Espiral Logarítmica

utiliza os seguintes comandos: Digite na caixa de entrada a curva α, a derivada da curva α, as funções f e g e suas derivadas: $\alpha(r)=Curva(e^r\cos(r),e^r,r,-3,3)$; $f(r)=e^r\cos(r)$; g(r)=$e^r\sin(r)$ $f'(r)=Derivada(f)$; $g'(r)=Derivada(g)$; $f''(r)=Derivada(f,2)$; $g''(r)=Derivada(g,2)$.

Se a curva α não parametrizada pelo comprimento de arco então a curvatura é dada pelo fórmula:

$$K(r)=\frac{-f''(r)g'(r)+f'(r)g''(r)}{\left((f'(r))\right)^2+\left((g'(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ então $K(s)=\frac{1}{\sqrt{2}e^s}$..

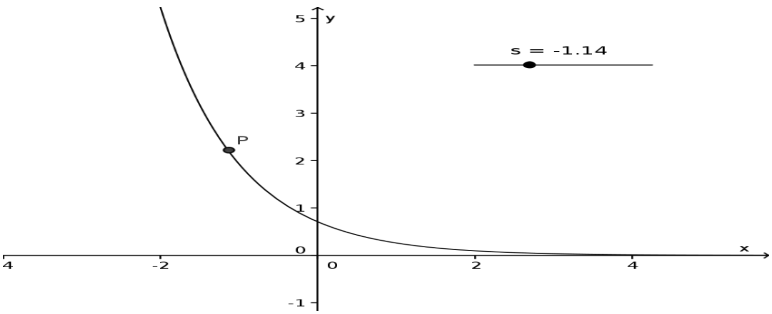


Figura 5: Curvatura da Espiral Logarítmica.

Fonte: Autoria própria.

Controle deslizante s de variação de -3 a 3 e o ponto P=(s,K(s)) e habilite rastro em P. Anime o controle deslizante s e observe a curvatura da curva da Espiral Logarítmica, de acordo com a Figura 5. A curva da Espiral Logarítmica não é parametrizada pelo comprimento de arco, mas como é uma curva regular pela Proposição 13 é determinada a curvatura e os vetores referencial de Frenet.

Aplicação 15: (Curvatura Máxima) Considere a curva regular $\alpha: R \to R^2$ definida por $\alpha(t)=(t,t^2-4t-3), t \in R$. Para que valor de *t* a curvatura da curva α é máxima?

As construções no Software Geogebra 2D para determinar a curvatura máxima da curva α utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante s de variação -5≤*s*≤5.

Digite na caixa de entrada:

$\alpha(t)=Curva(t,t^2-4t-3,t,-5,5)$; $P=(s,s^2-4s-3)$; $K=Curvatura(P,\alpha)$;

Q=(*S*,*K*) e habilite rastro no ponto Q; curvatura da curva α

$K_1(s)=\frac{2}{\left(1+(2s-4)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ e o ponto $A=Máximo(K_1(s),-5,5)$.

Anime o controle deslizante s e portanto em *t*=2 ocorre a curvatura máxima de α, de acordo com a Figura 6.

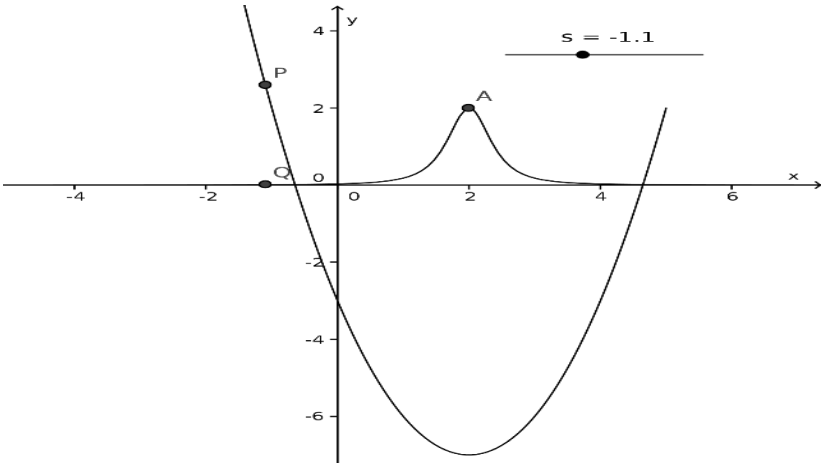


Figura 6: Curvatura Máxima da curva α.

Fonte: Autoria própria.

Teorema 16: (Teorema Fundamental das Curvas Planas)

a) Dada uma função diferenciável $K(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ existe uma curva regular α(*s*) parametrizada pelo comprimento de arco s, cuja curvatura é K(*s*).

b) A curva α(*s*) acima é única quando fixamos $\alpha(s_0)=p_0$ e $\alpha'(s_0)=v_0$ em que v_0 é um vetor unitário do $\mathbb{R}^2$.

c) Se duas curvas α(*s*) e *β*(*s*) têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\alpha(s)=(L\circ T)(\beta(s)).$$

Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas é possível reconstruir uma curva pela sua curvatura, ou seja, a curvatura determina a curva plana, a menos de sua localização no plano.

Aplicação 17: (Curvatura de uma função diferenciável)

Seja a função diferenciável $f(s)=s, s \in R$ então existe uma curva regular *α*(*s*), parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é *K*(*s*)=*f*(*s*).

Pelo Teorema Fundamental das curvas planas, temos que

$$\theta(s)=\int_0^s t\,dt=\frac{s^2}{2};\ \alpha(s)=\left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right)dt, \int_0^s sen\left(\frac{t^2}{2}\right)dt\right);\ t(s)=\alpha'(s)=\left(\cos\left(\frac{s^2}{2}\right), sen\left(\frac{s^2}{2}\right)\right);$$

$$t'(s)=\alpha''(s)=\left(-s\,sen\left(\frac{s^2}{2}\right), s\cos\left(\frac{s^2}{2}\right)\right) \text{ e } n(s)=\left(-sen\left(\frac{s^2}{2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{2}\right)\right).$$

As construções no Software Geogebra 2D para deteminar a curvatura de uma função diferenciável utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante c de variação -20≤c≤20.

Digitar na caixa de entrada:

$$f(s)=s;\ \ g(s)=\cos\left(\frac{s^2}{2}\right);\ h(s)=sen\left(\frac{s^2}{2}\right);$$

$$a=Integral(h,0,c);\ \ b=Integral(h,0,c);\ P=(a,b);\ h(s)=\frac{s}{a}$$

$$u=\left(-c\,sen\left(\frac{c^2}{2}\right),c\cos\left(\frac{c^2}{2}\right)(vetor\ n(s))\right)\ \textbf{(vetor}\ t'(s)\ \textbf{)}$$

$$v=\left(-sen\left(\frac{c^2}{2}\right),\cos\left(\frac{c^2}{2}\right)(vetor\ n(s))\right)\ \textbf{e}\ \ Q=(c,u*v).$$

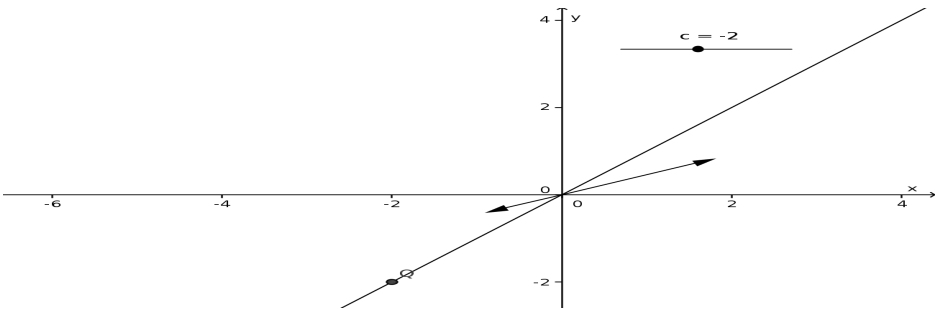


Figura 7: Curvatura de uma função diferenciável.

Fonte: Autoria própria.

Definição 18: Se $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é um número real

$$K(s)=\|\alpha'(s)\|$$

(a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominada curvatura da curva α) e $K(s)\geq 0$ para todo $s \in I$.

Geometricamente, visto que $\|t(s)\|=1$ e $\|K(s)\|=\|t(s)\|$ a função curvatura é uma medida da variação da direção de t , portanto, da mudança de direção da reta tangente a curva α em α(*s*). A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2003).

Definição 19: Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $K(s)>0$ O vetor

$$n(s)=\frac{\alpha''(s)}{K(s)}$$

é denominado vetor normal a α em s.

Observe que os vetores $t(s)=\alpha'(s)$ e $n(s)=\frac{\alpha''(s)}{K(s)}$ são vetores ortonormais, pois os vetores *t*(*s*) e *n*(*s*) são unitários e ortogonais.

Definição 20: Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de

arco tal que $K(s)>0$. O vetor binormal a α em s é

$$b(s)=t(s)\,x\,n(s)$$

em que a operação *x* denota o produto vetorial.

O referencial ortogonormal $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ é o triedro de Frenet da curva α em s . O triedro de Frenet forma uma base ortonormal de R^3. Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. O plano osculador é o plano determinado pelos vetores t(s) e n(s), o plano retificante é o plano determinando pelos vetores t(s) e b(s) e o plano normal é determinado pelos vetores n(s) e b(s).

Proposição 21: Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $K(s)>0$ então $b(s)$ é paralelo a $n(s)$.

Demonstração: Pela definição de vetor binormal a curva α em s , temos que b(s)=t(s) x n(s), derivando esta equação resulta em

$$b'(s)=t'(s)\,x\,n(s)+t(s)\,x\,n'(s).$$

Temos que t ' (s) x n(s)=0 pois os vetores b(s)=t(s) x n(s) e n(s) são paralelos pela Proposição 10. Portanto, b '(s)=t(s) x n '(s) e concluímos que b '(s) é ortogonal a t (s). Como o vetor binormal b(s) é ortonormal então ⟨b' (s),b (s)⟩=0 , isto é, b '(s) é ortogonal a b(s). Logo, b '(s) é paralelo a n(s).

Definição 22: O número real τ (s) definido por b ' (s)=τ (s)n(s) é denominado torção da curva α em s.

A torção τ (s) é a constante de proporcionalidade em que os vetores b ' (s) e n(s) são paralelos pela Proposição 21.

Definição 23: Uma curva regular $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice, se existe um vetor unitário que forma um ângulo constante com α' (t), para todo $t \in I$, isto é, $\frac{\langle \alpha'(t), v\rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ é constante.

Preposição 24: Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não-nulas. Então α é uma hélice, se e somente se, $\frac{K}{\tau}$ é constante.

Demonstração: (⇒) Considere a curva α parametrizada pelo comprimento de arco e por hipótese se α é uma Hélice e pela definição 23 existe um vetor unitário v tal que $\frac{\langle \alpha'(t), v\rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ é constante. Como ‖α ' (t)‖=1 então ⟨α '(t), v ⟩ é constante e denote por ⟨α '(t), v⟩=a . Derivando esta equação em relação a t resulta em

⟨α ' '(t), v ⟩=0 , isto é, ⟨K (s)n(s), v ⟩=0.

Sendo K não-nula então ⟨n(s), v ⟩=0 , o que implica que n(s) é ortogonal a v e v pertence ao plano determinado por t (s) e b(s) , para cada $s \in I$. Desta forma, podemos escrever v como combinação linear de t (s) e b(s), isto é, v =cos(θ (s))t (s)+sen(θ (s))b (s). Derivando a equação anterior e usando as fórmulas de Frenet, temos que

$$-sen(\theta(s))\theta'(s)t(s)+\cos(\theta(s))t'(s)+\cos(\theta(s))\theta'(s)b(s)+sen(\theta(s))b'(s)=0$$

e

$$-sen(\theta(s))\theta'(s)t(s)+(K(s)\cos(\theta(s))+\tau(s)sen(\theta(s)))n(s)+\cos(\theta(s))\theta'(s)b(s)=0.$$

Portanto, para todo $s \in I$

$-sen(\theta(s))\theta'(s)=0$, $\cos(\theta(s))\theta'(s)=0$ e $K(s)\cos(\theta(s))+\tau(s)sen(\theta(s))=0$

o que implica que θ '(s)=0 , isto , θ(s)=θ (constante).

Além disso,

$$K(s)=\frac{-\tau(s)sen(\theta)}{\cos(\theta)}$$

em que cos(θ)≠0 pois por hipótese τ (s)≠0. Assim, $\frac{K(s)}{\tau(s)}=\frac{-sen(\theta)}{\cos(\theta)}$ o que prova que $\frac{K}{\tau}$ constante para todo $s \in I$.

(⇐) Reciprocamente, como $\frac{K(s)}{\tau(s)}=\frac{-sen(\theta)}{\cos(\theta)}=-\tan(\theta)$ e considere o vetor unitário v dado por v=cos(θ (s))t (s)+sen(θ (s))b(s). Assim, ⟨α '(s), v ⟩=⟩ t(s), cos(θ)t (s)+sen(θ)b(s)⟩=cos(θ)⟨ t(s), t(s)⟩+sen(θ)⟨ t (s), b(s)⟩=cos (θ) em que ⟨t (s), b(s)⟩=0 e ⟨t (s),t (s)⟩=‖α '(s)‖2=1.

Portanto ⟨α '(s), v ⟩ é constante para todo $s \in I$ e pela Definição 23 a curva α é uma Hélice.

Aplicação 25: (Hélice) A curva regular α : [0,2 π)→R^3 definida por α (t)=(cost , sent, t) é uma hélice.

De fato, seja α' (t)=(–sen(t) , cos (t),1) e considere o vetor unitário m=(sent ,–cost,0) e o produto interno do vetor tangente e do vetor m,

$$\langle \alpha'(t),m\rangle=\langle(-sen(t),\cos(t),1),(sen(t),-\cos(t),0)\rangle=-sen^2(t)-\cos^2(t)=-1.$$

Como $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{sen^2(t)+\cos^2+1}=\sqrt{2}$

então $\frac{\langle \alpha'(t),v\rangle}{\|\alpha'(t)\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$, para todo,

Logo $\frac{\langle \alpha'(t),v\rangle}{\|\alpha'(t)\|}$ é constante e pela Definição 23 a curva α é uma hélice. As construções no Software Geogebra 3D para mostrar que a curva α é uma Hélice utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante s de variação 0≤s<2π e digite na caixa de entrada:

$\alpha(t)=Curva(\cos(t),sen(t),t,t,0,2\pi)$ e

$\alpha'(t)=Derivada(\alpha(t))$

e os pontos

P=(cos (s) , sen(s) , s); Q=(–sen(s) ,cos (s),1); O=(0,0,0); Q_1=(sen(s) ,–cos (s),0)

e os vetores u=Vetor (O,Q);

v=tranladar (u,P) (vetor tangente emP); w=Vetor (O,Q1);

m=tranladar (w ,P) (vetor unit rioem P); e o ângulo entre o vetor tangente e o vetor m unitário é β=Ângulo(v ,m).

Anime o Controle deslizante s e observe que o ângulo entre o vetor tangente e o vetor unitário é constante, o que conclui que a curva α é uma Hélice, de acordo com a Figura 8.

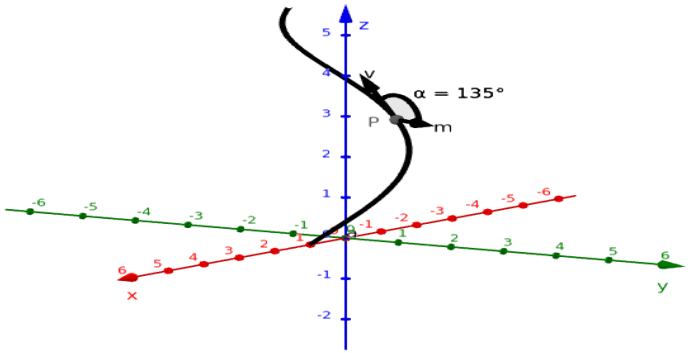


Figura 8: A curva α é uma Hélice.

Fonte: Autoria própria.

A aplicação seguinte usa o resultado da Proposição 24 para mostrar que a curva α da Aplicação 25 é uma Hélice.

Aplicação 26: A curva regular α : [0,2 π)→R3 definida por α (t)=(cost , sent , t) é uma hélice. As construções no Software Geogebra 3D para mostrar que a curva α é uma Hélice utiliza os seguintes comandos, digite na caixa de entrada:

α=Curva (cost , sent ,t , t ,0 ,2π) e a curva β é a reparametrização por comprimento de arco da curva α em que $\beta=\alpha\circ h$ e $h=\frac{t}{\sqrt{2}}$ e por mudança de variável $0\leq t<2\pi\sqrt{2}$ e a curva β, $\beta=Curva\left(\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),sen(\frac{t}{\sqrt{2}}),\frac{t}{\sqrt{2}},t,0,2\pi\sqrt{2}\right)$. Controle deslizante l de variação $0\leq l<2\pi\sqrt{2}$ e o ponto P e a curvatura, $P=\left(\cos(\frac{l}{\sqrt{2}}),sen(\frac{l}{\sqrt{2}}),\frac{l}{\sqrt{2}}\right)$ e K=Curvatura(P,β) e os pontos e vetores, $v1=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}sen(\frac{l}{\sqrt{2}}),\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{l}{\sqrt{2}}),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;; v=Transladar (v1 , P) (Vetor tangente); $v2=\left(-\cos(\frac{l}{\sqrt{2}}),-sen(\frac{l}{\sqrt{2}}),0\right)$; n=Transladar (v2 , P)(vetor normal); $v3=\left(\frac{1}{2}\cos(\frac{l}{\sqrt{2}}),\frac{1}{2}sen(\frac{l}{\sqrt{2}}),0\right)$ ew=Transladar (v 3,P)(vetor b ' (l)) em que b (l) é o vetor binormal; e a torção é dada por τ=w. n e a razão $d=\frac{K}{\tau}$. Na caixa de texto em LatexFórmula escreva Razão=d. Anime o controle deslizante l e observe que o vetor b' (l) e o vetor normal n(s) são paralelos e a constante de proporcionalidade é a torção.

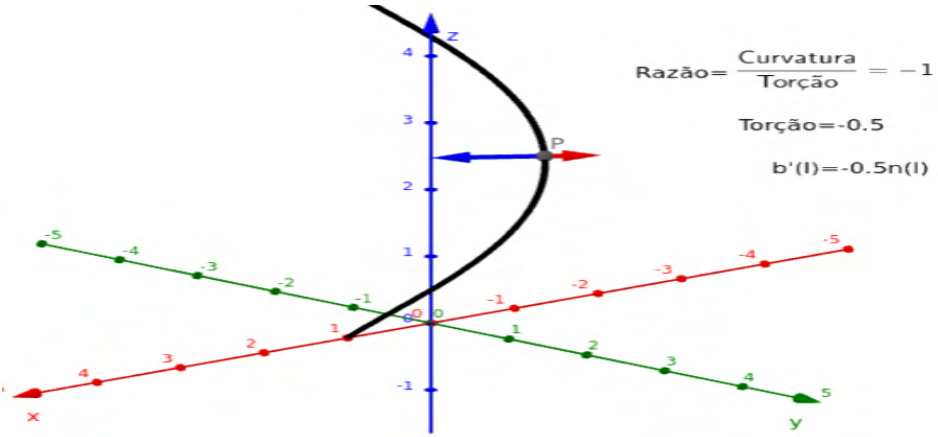


Figura 9: A curva α é uma Hélice.

Fonte: Autoria própria.

As hélices são as únicas curvas do espaço que apresentam curvatura e torção constantes (e não nulas). Esse fato deve-se ao Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas.

3 I CONCLUSÕES

Foram desenvolvidos comandos no Sofware Geogebra de aplicações e após construção deste comandos foram feitas animações no controle deslizante para observar o vetor tangente a um ponto da curva do cardiode, que a curva reparametrizada tem o mesmo traço da curva, curva parametrizada pelo comprimento de arco implica em vetor tangente unitário, análise de que a curva espacial é uma hélice verificado pela definição e proposição, curvatura da Espiral Logarítmica, curvatura máxima de uma curva e a parte geométrica do Teorema Local das curvas planas de que toda função diferenciável no plano tem curvatura e a curvatura é a própria função diferenciável.

REFERÊNCIAS

[1] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial das curvas e superfícies**. SBM, 2012.

[2] TENENBLAT , Keti. **Introdução à Geometria Diferencial.** Blucher, 2008.

CAPÍTULO 8

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTEGRADO AO SOFTWARE GEOGEBRA PARA ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Data de aceite: 01/03/2022

Joe Widney Lima da Silva
Sinop – Mato Grosso
http://lattes.cnpq.br/3914636434043839

Elisangela Dias Brugnera
Sinop – Mato Grosso
http://lattes.cnpq.br/0730600349059222

RESUMO: Este trabalho apresenta uma discussão sobre as tendências em Educação Matemática aplicadas à aprendizagem de função afim. A Resolução de Problemas é uma das tendências em Educação Matemática, que tem se destacado entre as produções acadêmicas no mundo. Com base nas autoras Onuchic e Allevato (2014), fica claro, que as pesquisas em Resolução de Problemas avançaram e produziram muitas informações relevantes, como as diferentes formas de aplicação da metodologia. As tecnologias digitais também fazem parte das tendências em Educação Matemática. Diante das mudanças no cenário educacional, as tecnologias digitais vêm sendo uma forte aliada de professores e alunos em ambientes virtuais. E nesse sentido, buscou-se por meio de um minicurso analisar como essas duas tendências poderiam corroborar com o ensino e aprendizagem de função afim.
PALAVRAS-CHAVE: Resolução de Problemas, GeoGebra, função afim.

PROBLEM SOLVING INTEGRATED TO THE GEOGEBRA SOFTWARE FOR INTENDED FUNCTION TEACHING

ABSTRACT: This work presents a discussion on trends in Mathematics Education applied to affine function learning. Problem Solving is one of the trends in Mathematics Education that has stood out among academic productions in the world. Based on the authors Onuchic and Allevato (2014), it is clear that research in Problem Solving has advanced and produced a lot of relevant information, such as the different ways of applying the methodology. Digital technologies are also part of trends in Mathematics Education. Given the changes in the educational scenario, digital technologies have been a strong ally of teachers and students in virtual environments. In this sense, it was sought through a short course to analyze how these two trends could corroborate to the teaching and learning of function affine
KEYWORDS: Problem Solving, GeoGebra, affine function.

INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, os homens se viram em circunstâncias que precisavam resolver problemas. O surgimento dos números por exemplo, se deu pela necessidade de contar os objetos. Assim, os homens das civilizações antigas tiveram que pensar em uma maneira de solucionar esse problema para expressar grandes quantidades de seus objetos. Nesse sentido, Krulik e Reys (1997) afirmam que:

> Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o 'animal que resolve problemas'; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos a simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim (KRULIK e REYS, 1997, p.2).

A Matemática e seus conceitos surgem exatamente nesse contexto de resolver problemas. Pensando nisso, é valido ressaltar que usamos nossos conhecimentos sobre matemática cotidianamente, seja quando lemos as horas, quando fazemos compras e na escolarização formal também temos essa disciplina como um componente curricular.

Estudar matemática está intrinsecamente relacionado com resolver problemas. Sendo assim, é responsabilidade dos professores de matemática de todos os níveis ensinar a arte de resolver problemas (DANTE, 2005).

Com base nas palavras de Dante, podemos conjecturar que estudar Matemática não deve se resumir a reproduzir métodos repetitivos e fazer cálculos para fortalecer a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Porque, estudar Matemática também é solucionar problemas dos mais variados contextos. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam:

> […] educadores matemáticos apontam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução (BRASIL, 1998, p.39).

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) propõe um ensino de Matemática que, por meio da Resolução de Problemas, o aluno a articular os diversos campos da Matemática – Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade – e, ainda, a desenvolver a capacidade de agir matematicamente nas mais diversas situações do cotidiano.

Na segunda competência geral da BNCC aparece o termo "resolver problemas" que está muito direcionado a uma concepção de "preparar" o aluno para resolver problemas diante das diversas situações e contextos das ciências. E as inserções nas competências específicas da matemática estão voltadas à perspectiva de aprender matemática para resolver problemas e não resolver problemas para aprender matemática:

> [...] assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2018, p. 263).

Percebemos que a BNCC se contrapõe ao que se menciona nos PCN, cabe ressaltar que a abordagem contida nesse trabalho se assemelha ao que salientou os PCN. É importante dizer que a Resolução de Problemas, enquanto metodologia, desempenha um papel fundamental ao se ensinar conteúdos de Matemática. Esperamos assim, que por

meio da Resolução de Problemas, os alunos sejam desafiados a desenvolver estratégias para encontrar soluções para o problema matemático e, assim, se tornem mais ativos no processo de aprendizagem.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E SUA IMPORTÂNCIA AO ENSINO DE MATEMÁTICA

Embora a Resolução de Problemas seja uma abordagem muito valorizada no ensino e aprendizagem de Matemática, existe certa complexidade para trabalhá-la em sala de aula (DANTE, 2005). Segundo o autor, é natural que os alunos saibam resolver uma determinada operação e possivelmente não consigam resolver um problema que envolve a mesma operação. Fortalecendo esse argumento, Darsie e Palma (2013) destacam que:

> […] o índice de desempenho dos alunos em matemática tem sido baixo. As pesquisas indicam que os itens de procedimentos de cálculo são aqueles em que os alunos têm melhores resultados e os itens de Resolução de Problemas são aqueles em que os alunos têm um pior desempenho (DARSIE e PALMA, 2013, p.12).

Com base nessas informações, podemos afirmar que a maioria dos alunos não desenvolve um bom resultado com relação a Resolução de Problemas. Isso se deve, pelo fato da resolução de um problema não estar unicamente relacionada com a habilidade de resolver exercícios. Além disso, para se resolver problemas matemáticos, também é necessário interpretar, e em algumas situações, investigar novos métodos para se chegar a uma resposta.

Isso sugere, que para trabalhar com Resolução de Problemas, os educadores matemáticos precisam buscar compreender bem a dinâmica dessa metodologia e desenvolver o hábito de se resolver problemas em sala de aula. Cai e Lester (2012) chamam atenção, para o fato de que:

> […] os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a Resolução de Problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de Resolução de Problemas em sala de aula para fazer da Resolução de Problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula (p. 156).

Por meio da afirmação dos autores, podemos dizer que aplicar a resolução de problema ao ensino de matemática é um processo paulatino, em que os professores vão desenvolvendo em seus alunos uma cultura de Resolução de Problemas. Ainda que lentamente, os alunos desenvolvem uma familiaridade com essa metodologia, para que no final do processo, cheguemos ao objetivo de fazer com que a Resolução de Problemas se torne uma parte regular das práticas pedagógicas em sala de aula.

Não obstante a Resolução de Problemas ser uma metodologia difícil de ser

trabalhada em sala de aula, ela tem estado em destaque entre as produções de trabalhos acadêmicos voltados para a Educação Matemática, no mundo todo. Nas últimas décadas, o Brasil especificamente, tem aumentado significativamente o número de pesquisas, debates e divulgações de vivências a respeito desse tema. Assim, independentemente das áreas do conhecimento e de suas concepções teóricas, existe um consenso entre os educadores de que a Resolução de Problemas desenvolve um importante papel no processo de aprendizagem matemática (DARSIE e PALMA, 2013).

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC destaca com relação a sua concepção a respeito das habilidades que os estudantes devem desenvolver em matemática. Segundo Brasil (2018, p. 519):

> […] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de Resolução de Problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Conforme essa afirmação, percebemos que o documento cita a Resolução de Problemas e também aponta quais habilidades os alunos podem desenvolver ao resolver problemas. A resolução de problema pode estimular: o próprio modo de raciocinar, a representação por meio de gráficos, a argumentação e etc.

ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Antes de abordar o tema sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas é oportuno apresentar as outras formas de se trabalhar com Resolução de Problemas na perspectiva das autoras Morais e Onuchic (2014).

As autoras citam os pesquisadores Schroeder e Lester (1989), que em 1989, no livro do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM[1]) intitulado "Direções para a Matemática da Escola Elementar", no capítulo "Desenvolvendo a Compreensão na Matemática via Resolução de Problemas", apresentaram as diferentes maneiras de se trabalhar com a Resolução de Problemas no ensino. Segundo os autores, a Resolução de Problemas se divide em três tipos de abordagem, são elas: (1) ensinando sobre Resolução de Problemas; (2) ensinando para resolver problemas e (3) ensinando via Resolução de Problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989 *apud* MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 29).

Morais e Allevato (2014) explicam que ensinar *"sobre"* Resolução de Problemas consiste basicamente em trabalhar com os métodos empregados por Polya (1995). O húngaro George Polya, também professor da Universidade de Stanford, conhecido pelo

1 A NCTM foi fundada em 1920 e é a maior organização de educação matemática do mundo. Esse conselho publica cinco revistas oficiais. Todos estão disponíveis em versões impressas e online.

estudo da heurística[2] em Resolução de Problemas e considerado um dos pioneiros a respeito da pesquisa sobre esse tema, escreveu uma obra importante chamada *"A Arte de Resolver Problemas"*.

George Polya direciona professores de Matemática, como trabalhar com essa metodologia em sala de aula. Assim, Polya (1995) destaca 4 fases para se resolver problemas:

- Compreensão do problema;
- Estabelecimento de um plano;
- Execução do plano;
- Retrospecto.

Na primeira fase da resolução de um problema, o autor esclarece que inicialmente é preciso entender o problema, para tanto, o resolvedor extrair do problema: os dados, as incógnitas, as condicionantes. Também é nessa fase que se ilustra o problema e desenha diagramas e figuras.

Na segunda fase, é necessário responder a algumas perguntas como: Qual a conexão entre os dados e a incógnita? Já fiz algum problema semelhante a esse problema (problema correlato)? Após responder essas indagações, então, enfim, se traça um plano para resolver o problema.

Na terceira fase, o aluno vai executar o plano traçado, verificando se cada passo da resolução foi feito de forma correta. Por fim, no quarto passo, o resolvedor vai fazer uma retrospectiva da solução e verificar se a conclusão é válida.

No ensino *"para"* resolver problemas, o professor se concentra em descobrir formas de como os conteúdos de Matemática podem ser aplicados na Resolução de Problemas rotineiros e não rotineiros. Embora, o conceito matemático seja visto em primeiro plano, o objetivo principal dessa metodologia é ser capaz de usá-la (MORAIS e ONUCHIC, 2014). Além disso, Onuchic e Allevato (2014) salientam que:

> Não obstante as aplicações da Matemática tenham inquestionável relevância, um perigo dessa concepção é que ela configure a Resolução de Problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de algum algoritmo. Assim, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e a Resolução de Problemas é utilizada para dotar a teoria de um significado prático (ONUCHIC e ALLEVATO, 2014, P. 38).

Em suma, nessa concepção se ensina os conceitos matemáticos que posteriormente será usada para resolver uma situação-problema (ANDREATTA e ALLEVATO, 2020).

Morais e Allevato (2014), também discorrem sobre o ensino "via" Resolução

2 Heurística, Heurética ou ars inveniendi era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à lógica, à filosofia ou à psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção.

de Problemas. Essa abordagem começa com o professor apresentando uma situação-problema em sala de aula e posteriormente ele discute com seus alunos as técnicas que poderiam ser úteis para resolver o problema.

Semelhantemente, conforme Schroeder e Lester (1989) relataram, essa abordagem diferente das duas primeiras ("sobre" e "para"), é mais coincidente com as recomendações dos *Padrões de Currículo e Avaliação de Matemática Escolar (1989),* livro publicado pela NCTM, quando afirmam:

> (1) conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da Resolução de Problemas; (2) o desenvolvimento de processos de pensamento superior é fomentando através de experiências de Resolução de Problemas; e (3) o ensino de matemática tem lugar numa pesquisa orientada, num ambiente de Resolução de Problemas. (NCTM, 1987 apud SCHROEDER; LESTER, 1989, p.34).

Por fim, Onuchic e Allevato (2011, p.79-80) relatam que a partir do documento *Standards*[3] (NCTM, 2000), "[…] os educadores matemáticos passaram a pensar numa Metodologia de ensino e aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas". E diante disso, as autoras consideram a abordagem que defendem como sendo *"a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas"*.

Segundo Onuchic e Allevato (2014), a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas, amplia e inclui os três tipos anteriores de abordagem de ensino de Resolução de Problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989). As autoras ainda apresentam um roteiro para trabalhar com essa abordagem em sala de aula e estão divididos em 10 passos. São eles:

> "(1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) Registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

Para desenvolvermos está pesquisa utilizamos a abordagem de resolução de problemas das autoras Onuchic e Allevato (2014). Apresentaremos a seguir o caminho metodológico percorrido para a elaboração da pesquisa.

CAMINHOS METODOLÓGICOS

Como esta pesquisa parte do pressuposto, que o uso da Resolução de Problemas integrada aos recursos dinâmicos do software GeoGebra pode ser uma alternativa para o ensino de funções afim, efetivamente foram adotados os parâmetros propostos pela pesquisa qualitativa. Conforme afirma Minayo (2001), em seu livro sobre pesquisa social, a pesquisa qualitativa preocupa-se, com os aspectos da realidade que não podem ser

3 Publicação com orientações para o trabalho com a Matemática Escolar até os 12 anos de idade – *Principles and Standads for School Mathematics*. Seu público-alvo inclui professores, dirigentes escolares, elaboradores de materiais didáticos e curriculares, legisladores, pesquisadores, entre outros.

quantificados. Desse modo, o objetivo da pesquisa qualitativa é o levantamento de dados que estão no âmbito dos significados, das motivações, das crenças e princípios. Essa abordagem corresponde a um espaço mais profundo dos processos e fenômenos que geralmente não podem ser resumidos a uma análise de dados estatísticos.

Em uma perspectiva similar, para Engel e Silveira (2009), uma pesquisa qualitativa busca explicar o porquê determinado fenômeno ocorre e o que convém ser feito a partir dele, sem quantificar os possíveis valores e trocas simbólicas nem se submeter à prova dos fatos, pois os dados coletados não são métricos e se valem de diversas percepções.

Diante dessas afirmações, cabe esclarecer que esta pesquisa não será direcionada a uma abordagem de cunho quantitativo. Uma vez que, a prioridade do pesquisador não será mensurar e quantificar as performances dos participantes ou apontar variáveis quantitativas a fim de chegar em uma resposta para a problematização.

Iniciamos a pesquisa realizando um estudo bibliográfico para melhor compreender o tema e o problema a ser pesquisado. Em seguida, foi necessário reformularmos a aplicação da pesquisa, pois antes da pandemia do Covid-19 propusemos a aplicação de uma oficina presencial que seria realizada em uma escola estadual no município de Sinop – MT. Devido à pandemia, foi preciso planejar novamente o formato e aplicação desse minicurso, para adequarmos ao ensino remoto e desta forma atendermos às medidas sanitárias contra a Covid-19.

Propusemos um minicurso a distância com a temática “Resolução de Problemas integrado ao software GeoGebra para a aprendizagem de função afim” com carga horária de 20 horas que foi ofertado seguindo o edital 004/2021 da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, Campus de Sinop, sob a coordenação dos professores Rogério dos Reis Gonçalves e Luciana Mafalda Elias de Assis.

O minicurso foi aberto à comunidade acadêmica e a comunidade externa, contando com a participação de 23 cursistas de diversas instituições de ensino. Destes, selecionamos 7 que aceitaram fazer parte da pesquisa e que efetivamente participaram do minicurso.

Apresentamos no quadro (1) o cronograma das atividades desenvolvidas no minicurso:

CRONOGRAMA DAS ATIVIDADES	
Atividades	Data
Início do Minicurso.	18/09/2021
Instalação do Software GeoGebra.	18/09/2021
Manipulação no Software.	18/09/2021
Proposta da resolução do primeiro problema de função afim	18/09/2021
Atividades assíncronas	25/09 a 01/10
Apresentar as resoluções.	02/10/2021
Realizar uma plenária para discutir os resultados.	02/10/2021
Formalizar os conceitos estudados e propor um novo problema.	02/10/2021
Atividades assíncronas	03/10 a 15/10
Apresentar as resoluções.	16/10/2021
Realizar uma plenária para discutir os resultados.	16/10/2021
Formalizar os conceitos estudados e propor um novo problema.	16/10/2021
Atividades assíncronas	17/10 a 29/10
Apresentar as resoluções.	30/10/2021
Realizar uma plenária para discutir os resultados.	30/10/2021
Formalizar os conceitos estudados e aplicar um questionário final.	30/10/2021

Quadro 1 – Cronograma de atividades.

Fonte: Autoria própria.

No início do minicurso, aplicamos um questionário inicial para conhecer o perfil dos cursistas, depois seguimos as orientações das autoras Onuchic e Allevato (2014) descritas no roteiro de atividades.

Nesse ponto, vamos descrever como o roteiro da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através de Resolução de Problemas das autoras Onuchic e Allevato (2014) foi adaptado para o ensino remoto. O **passo 1**, iniciou com a elaboração ou escolha do problema gerador. Esse problema foi o ponto de partida das atividades. A partir desse ponto foi ensinado e construído novos conceitos matemáticos. De acordo com essa sugestão, para o início do trabalho o professor[4] seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos, ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos (ALLEVATO, 2014 apud ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

4 É importante mencionar que todos as vezes que nós usamos a palavra professor no texto, estamos nos referindo ao autor dessa pesquisa e professor regente é o responsável pela turma.

No **passo 1**, propusemos um problema para os cursistas sobre o conteúdo de função afim. Vale ressaltar que utilizamos problemas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pois acreditamos que nesse exame podemos encontrar várias aplicações interessantes para o conteúdo de função afim que podem ser adaptadas para resolver usando o GeoGebra. Escolhemos primeiramente uma questão do **ENEM** da prova de 2009[5] como problema gerador.

Posteriormente, no **passo 2**, o professor convida os cursistas a fazerem uma leitura individual do problema e tentar compreender o que o problema está propondo. Nesse ponto, o cursista tem a oportunidade de ter contato com a linguagem matemática e de desenvolver sua própria compreensão do problema. Esse passo ocorreu por meio do acesso que os cursistas tiveram aos materiais de aula no Google Drive.

No **passo 3**, o professor pede para os alunos formarem pequenos grupos para: refletir sobre o problema, discutir sobre ele e tentar resolvê-lo. Nesse ponto, pedimos para os cursistas se dividirem em grupos e discutirem sobre a resolução do problema. O meio de comunicação das ideias ocorreu via grupo do aplicativo WhatsApp e videoconferências no Google Meet.

Na sequência, no **passo 4**, os grupos tentam resolver o problema com os conhecimentos que possuem, as estratégias que conhecem e que consideram ser mais adequadas para a resolução. As atividades foram realizadas por meio de videoconferências sendo as reuniões consideradas como horas assíncronas. Para auxiliar os cursistas ainda na primeira aula síncrona, realizamos um tutorial de instalação do software GeoGebra e exploramos as ferramentas básicas do software.

Durante esse momento, no **passo 5**, o professor observa o trabalho dos grupos, instiga a participação de cada aluno na atividade e os auxilia em problemas secundários[6] sem emitir respostas para a atividade ou processos definitivos para a resolução do problema gerador. Nesse passo, ficamos disponíveis para ajudar os cursistas com problemas secundários e participamos das videoconferências onde os grupos se reuniram para auxiliá-los.

Após os grupos resolverem ou tentarem resolver o problema, no passo (6), eles registram suas resoluções na lousa (respostas certas e erradas ou feitas por processos diferentes), para que todos, alunos e o professor, possam: observar, analisar e discutir no **passo 7**. No **passo 6**, adaptamos para o ensino remoto, então pedimos para os cursistas apresentarem sua tela no Google Meet.

Já no **passo 7**, na plenária, os alunos têm a oportunidade de comparar suas respostas, refletir e defender suas ideias utilizadas para resolver problemas. Nesse passo os cursistas explicaram porque sua resolução estava correta. Tendo o professor

5 ENEM 2009 – Caderno Azul, questão n°159

6 Dúvidas referentes à notação, à passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, a conceito relacionados e a técnicas operatórias.

como mediador, no **passo 8**, todos (cursistas e professor) tentam chegar a uma decisão consensual sobre a solução do problema.

Então, em seguida no **passo 9**, apresentamos uma formalização matemática, isto é, esclarecemos os conceitos e conteúdos envolvidos na resolução do problema, apresentando a linguagem matemática, as definições, as notações e propriedades. Os **passos 7, 8, 9** ocorreram no Google Meet na aula síncrona.

Enfim, no **passo 10**, novos problemas foram propostos para avaliar as compreensões construídas ao decorrer do processo e consolidar a aprendizagem. A partir daí, o círculo de aprendizagem pode ser reiniciado, de modo que, esses problemas podem proporcionar novas aprendizagens e a sala de aula se torna um lugar em que as práticas pedagógicas são orientadas pela Resolução de Problemas.

No **passo 10** propusemos um novo problema[7] do **ENEM**

CONSIDERAÇÕES

Diante dos resultados obtidos mediante as nossas investigações, levantamos uma discussão válida sobre as nossas práticas pedagógicas empregadas ao ensino de função afim.

Além disso, podemos destacar, por exemplo, o excesso de formalismo que distância o conteúdo que está sendo aprendido em sala de aula da realidade dos alunos. Entendemos que o formalismo é necessário, pois o rigor matemático mostra o porquê os algoritmos e ferramentas matemáticas funcionam da forma que conhecemos. Porém, em contraposição a esse afastamento da realidade causada pela abstração, a Resolução de Problemas contextualiza e aproxima o ensino e aprendizagem dos conteúdos da realidade cotidiana dos alunos.

A aplicação do minicurso mostrou que essa abordagem contribuiu significativamente para que houvesse várias reflexões entre os participantes. No momento das plenárias, os participantes argumentaram como chegaram as resoluções dos problemas. Conforme a BNCC aponta é característico dessa metodologia de ensino fortalecer a habilidade da argumentação no aluno e nesse ponto, os resultados confirmam essa afirmação.

É importante destacarmos que a plenária foi um dos momentos mais importantes das aulas síncronas. Ouvimos dos cursistas que essa troca de saberes enriqueceu as aulas. Os participantes puderam aprender se expressando quando explicavam suas resoluções aos seus colegas e ainda conseguiam lidar bem com as críticas construtivas sobre suas respostas.

Na formalização analisamos que a segunda forma que apresentamos se mostrou mais eficaz que a primeira exposição. Essa segunda formalização da definição de função (jogo de queimada), foi construída com os cursistas e a maioria entendeu as situações

7 Problema do ENEM 2017/PPL -Caderno Amarelo, questão 166.

hipotéticas da relação entre dois conjuntos que não eram uma aplicação.

Outro ponto discutido foi como o uso do GeoGebra pode contribuir para o ensino e aprendizagem de função afim. Nas aulas assíncronas do minicurso, presenciamos a autonomia dos alunos para resolver os problemas propostos. Além do dinamismo, os cursistas faziam suas analises gráficas com interferência mínima da nossa parte.

Conforme as respostas obtidas no questionário final, o GeoGebra auxiliou os cursistas a visualizar de forma geométrica a taxa de variação e como representá-la, o domínio e imagem dos modelos correspondentes as situações problemas. Durante as aulas gravadas, ouvimos dos participantes que o uso do GeoGebra tornou as resoluções dos problemas mais simples e dinâmicas.

Finalmente, todo esse percurso percorrido favoreceu para que amadurecêssemos enquanto futuros professores de matemática. Assim, tendemos a pensar com base no embasamento teórico, na aplicação de questionários e na aplicação do minicurso que tanto a Resolução de Problemas quanto o software GeoGebra contribuem significativamente para o ensino e aprendizagem de função afim. Entretanto, os resultados podem variar sendo aplicados em outros contextos, mas, como se trata de uma pesquisa qualitativa podemos afirmar que o resultado foi satisfatório.

REFERÊNCIAS

ANDREATTA, C. ALLEVATO, N. S. G. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Ensino da Matemática em Debate (ISSN: 2358-4122), São Paulo, v. 7, n. 3, p. 262-296, 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC. Disponível em: BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (mec.gov.br). 2018. Acesso em: 13 de maio de 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12ª ed. São Paulo: Ática, 2005.

CAI, J; LESTER, F.. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: Boletim GEPEM. Trad. Bastos, A. S. A. M. e Allevato, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, 2012, p. 241-254. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=837 Acesso em:10 maio de 2019

DARSIE, M. M., PALMA, R. C. **Resolução de Problemas algumas reflexões em Educação Matemática**. Cuiabá: EdUFMT. 2013.

ENGEL, T. G. e SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

KRULIK, S. REYS, R. E. **A Resolução de Problemas na matemática escolar**/ tradução Hygino H. Domingues, Olga Corbo - São Paulo: Atual, 1997.

MINAYO, M. C. D. S. **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. **Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas.** In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). *Resolução de Problemas*: teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17-34.

ONUCHIC, L. D. L. R. **Ensino e aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?** In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). Resolução de Problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático.Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Interciência. Rio de Janeiro, 1995.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. **Developing undertanding in mathematics via problem solving.** In: TRAFTON, P.R; SHULTE, A. P. (Ed.). New directions for elementar school mathematics. Reston: NCTM, 1989.

CAPÍTULO 9

IDENTIDADES POLINOMIAIS Z_2-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES 2x2

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 23/02/2022

Mateus Eduardo Salomão
Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Matemática
São Carlos – SP
http://lattes.cnpq.br/9042467665583924

Evandro Riva
Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Matemática
São Carlos – SP
http://lattes.cnpq.br/4157173099755399

RESUMO: Este artigo aborda o conceito de álgebras de Jordan e de suas identidades polinomiais. Mais ainda, apresenta a classificação de todas as Z_2-graduações não triviais para a álgebra das matrizes triangulares superiores 2*x*2 com entradas em um corpo de característica diferente de 2, bem como apresenta uma base formada pelas identidades polinomiais Z_2-graduadas para todas estas Z_2-graduações.
PALAVRAS-CHAVE: Álgebras de Jordan, Graduações, Identidades Polinomiais.

Z_2-GRADED POLYNOMIAL IDENTITIES FOR THE JORDAN ALGEBRA OF 2x2 UPPER TRIANGULAR MATRICES

ABSTRACT: This article addresses the concept of Jordan algebras and their polynomial identities. Furthermore, it presents the classification of all non-trivial Z_2-gradings for the algebra of upper triangular matrices with entries in a field of characteristic different from 2, as well as presents a basis formed by the Z_2-graded polynomial identities for all these Z_2-gradings.
KEYWORDS: Jordan álgebras, Gradings, polynomial identities.

1 I INTRODUÇÃO

O conceito de identidades em uma estrutura algébrica é bastante geral. As leis de comutatividade, associatividade e distributividade dos números reais que aprendemos no ensino básico, são exemplos de identidades. Vagamente falando, uma identidade é uma expressão simbólica envolvendo uma ou várias operações e uma ou várias variáveis, que é identicamente satisfeita quando as variáveis são substituídas por elementos de uma estrutura algébrica. Neste contexto, surge a teoria de PI-álgebras, que estuda identidades polinomiais para as álgebras, que são estruturas de significativa importância na Teoria de Anéis. O estudo de PI-álgebras é algo de grande relevância, pois as identidades polinomiais dão informações significativas a respeito da álgebra em questão.

Neste artigo, explanaremos a respeito de identidades polinomiais Z_2- graduadas para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores 2x2 com entradas em um corpo (finito ou infinito) de característica diferente de

2. Tais identidades foram descritas em [5] e [6].

Para um estudo mais detalhado a respeito de identidades polinomiais, indicamos as referências [1], [2] e [3].

Ao longo de todo o texto, K denotará um corpo de $\mathrm{char}(K)\neq 2$, onde $\mathrm{char}(K)$ denota a característica de K. Além disso, todas as álgebras consideradas serão sobre K. Mais ainda, denotaremos a cardinalidade de K por $|K|$.

2 | ÁLGEBRAS DE JORDAN

Nesta seção, vamos definir alguns conceitos e propriedades referentes a estrutura de uma álgebra de Jordan, que é uma classe muito importante de álgebras. Iniciamos com a definição de associador.

Definição 1 (Associador): Seja A uma álgebra e $a, b, c \in A$, dizemos que

$$(a, b, c)=(ab)\, c - a\, (bc)$$

é o *associador* de a, b e c, nesta ordem.

Na sequência, definimos a estrutura de álgebra de Jordan.

Definição 2 (Álgebra de Jordan): Uma álgebra comutativa A é chamada de *álgebra de Jordan* se

$$(a^2, b, a)=0$$

para todos $a, b, \in A$.

Podemos criar uma álgebra de Jordan a partir de uma álgebra associativa como segue: se A é uma álgebra associativa, equipada com o produto $\cdot$, então o espaço vetorial A equipado com um novo produto $\circ$, chamado *produto de Jordan*, que é definido por

$$a \circ b = (1/2)\, (a\cdot b+b\cdot a),$$

onde $a, b \in A$, é uma álgebra de Jordan, denotada por $A^{(+)}$.

Por fim, definiremos identidade polinomial para álgebras de Jordan. Os polinômios em questão, são elementos da álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por um conjunto de variáveis X, que é denotada por $J\,(X)$.

Definição 3 (Identidade Polinomial): Sejam A uma álgebra de Jordan unitária e $f=f(x_1,...,x_n) \in J\,(X)$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se

$$f\,(a_1,...,a_n) = 0$$

para todos $a_1,...,a_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Se $T\,(A) = \{0\}$, dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

3 | A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES

Nesta seção, definiremos e apresentaremos algumas propriedades da álgebra de Jordan $Uj_2(K)$. Esta álgebra é nosso objeto de estudo ao longo deste artigo. Antes de definir $Uj_2(K)$, precisamos relembrar alguns conceitos e fixar algumas notações. Denote a álgebra associativa unitária das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em K munido

coma operação usual de produto por $UT_n(K)$. Destacamos nesta álgebra a matriz unitária e_{ij}, cuja entrada (i, j) é igual a 1 e as demais entradas são iguais a 0.

Definição 4 (A álgebra de Jordan $Uj_2(K)$): A álgebra de Jordan $Uj_2(K)$ é o espaço vetorial $Uj_2(K)$ munido com o produto de Jordan $\circ$.

Antes de prosseguir, relembramos brevemente que uma álgebra de Jordan A é G-graduada, onde G um grupo qualquer, se A pode ser escrita como soma direta de subespaços vetoriais

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

tais que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g, h \in G$.

Por simplicidade, denotaremos

$$1 = e_{11} + e_{22}, \quad a = e_{11} - e_{22} \quad \text{e} \quad b = e_{12}.$$

Observe que o conjunto $\{1, a, b\}$ é uma base $Uj_2(K)$.No artigo [6], Koshlukov e Martino descreveram todas as possíveis Z_2-graduações da álgebra de Jordan $Uj_2(K)$. Destacamos este fato na sequência de resultados abaixo.

Lema 1: Escrevendo $j = Uj_2(K)$, temos que as seguintes decomposições $j = j_0 \oplus j_1$ são Z_2-graduações de j, onde $Z_2 = \{0, 1\}$

1. A graduação associativa: $j_0 = K \oplus Kb$, $j_1 = Ka$.
2. A graduação escalar: $j_0 = K$, $j_1 = Ka \oplus Kb$.
3. A graduação clássica: $j_0 = K \oplus Ka$, $j_1 = Kb$.

Aqui, identificamos K com as matrizes escalares em j.

A próxima proposição garante que as únicas Z_2-graduações de $Uj_2(K)$ são as três descritas no lema anterior. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [6, Proposition 4].

Proposição 1: As três graduações do Lema 1 são, a menos de isomorfismos graduados, as únicas Z_2-graduações não triviais em $Uj_2(K)$.

4 | IDENTIDADES Z_2-GRADUADAS PARA $UJ_2(K)$

Nesta seção, descreveremos todas as identidades polinomiais Z_2-graduadas para a álgebra de Jordan $Uj_2(K)$ conforme as Z_2-graduações apresentadas no Lema 1.

4.1 A Graduação Associativa

Nesta subseção, descreveremos o conjunto $T_{Ass}(Uj_2(K))$ de todas as identidades polinomiais Z_2-graduadas para $Uj_2(K)$ com a graduação associativa. As demonstrações dos resultados desta subseção são bastante longas e podem ser encontradas em [5].

O primeiro resultado descreve $T_{Ass}(Uj_2(K))$ para o caso em que K é um corpo infinito

de char(K)≠2.

Teorema 1: Se K é um corpo infinito de char(K)≠2 então T_{Ass} ($Uj_2(K)$) é gerado, como um T_{Z_2}-ideal, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (z_1, y_1, z_2), (z_1, z_2, z_3) \quad e \quad (z_1 z_2, z_3, z_4).$$

Na sequência, descreveremos o caso para K finito de char(K)≠2.

Teorema 2: Se K é um corpo finito com |K|=q elementos e char(K)≠2, então T_{Ass} ($Uj_2(K)$) é gerado, como um T_{Z_2}-ideal,, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (z_1, y_1, z_2), (z_1, z_2, z_3), (z_1 z_2, z_3, z_4),$$
$$(y_1^q - y_1)(y_2^q - y_2), z_1^q - z_1 \quad e \quad (y_1^q - y_1) z_1.$$

4.2 A Graduação Escalar

Nesta subseção, descreveremos o conjunto T_{Sca} ($Uj_2(K)$) de todas as identidades polinomiais Z_2-graduadas para $Uj_2(K)$ com a graduação escalar. As demonstrações dos resultados desta subseção são um tanto extensas e podem ser encontradas em [5].

O próximo resultado descreve T_{Sca} ($Uj_2(K)$) para o caso em que K é um corpo infinito de char(K)≠2.

Teorema 3: Se K é um corpo infinito de char(K)≠2 então T_{Sca} ($Uj_2(K)$) é gerado, como um T_{Z_2}-ideal, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), \ (z_1, y_1, y_2), \ (y_1, z_1, z_2) \quad e \quad z_1(z_2, z_3, z_4).$$

Na sequência, descreveremos o caso para K finito de char(K)≠2.

Teorema 4: Se K é um corpo finito com |K| = q elementos e char(K)≠2, então T_{Sca} ($Uj_2(K)$) é gerado, como um T_{Z_2}-ideal,, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (y_1, z_1, z_2), z_1(z_2, z_3, z_4), y_1^q - y_1 \ \text{ e } \ (z_1^q - z_1) z_2.$$

4.3 A Graduação Clássica

Nesta subseção, descreveremos o conjunto T_{Cla} ($Uj_2(K)$) de todas as identidades polinomiais Z_2-graduadas para $Uj_2(K)$ com a graduação clássica. As demonstrações dos resultados desta subseção são um tanto extensas e podem ser encontradas em [5].

O próximo resultado descreve T_{Cla} ($Uj_2(K)$) para o caso em que K é um corpo infinito de char(K)≠2.

Teorema 5: Se K é um corpo infinito de char(K)≠2 então T_{Cla} ($Uj_2(K)$) é gerado, como um T_{Z_2}-ideal, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), \quad z_1 z_2 \quad \text{e} \quad (y_1, z_1, y_2).$$

Na sequência, descreveremos o caso para K finito de char(K)≠2.

Teorema 6: Se K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e char(K)≠2, então T_{Cla} ($Uj_2(K)$) é gerado, como um T_{Z_2}-ideal,, pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3), \quad z_1 z_2, \ (y_1, z_1, y_2) \text{ e } y_1^q - y_1.$$

Para finalizar o texto, destacamos que o estudo das identidades ordinárias de $Uj_2(K)$ (em outras palavras, as identidades Z_2-graduadas para a graduação trivial) sobre qualquer corpo K de char(K)≠2, foi iniciado em [6] e concluído, recentemente, em [4].

REFERÊNCIAS

[1] ALJADEFF, E.; GIAMBRUNO A.; PROCESI, C.; REGEV, A. **Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2020.

[2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[3] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[4] GONÇALVES, D. J.; KOSHLUKOV, P.; SALOMÃO, M. Polynomial identities for the Jordan álgebra of upper triangular matrices. **Journal of Algebra.** v. 593, p. 477–506, 2022.

[5] GONÇALVES, D. J.; SALOMÃO, M. E. -graded polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices, 2020. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2011.11116.

[6] KOSHLUKOV, P.; MARTINO, F. Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order 2. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 216, n. 11, p. 2524–2532, 2012.

CAPÍTULO 10

OS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES PÚBLICAS DA BAHIA: COMO ARTICULAM OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS À DOCÊNCIA?

Data de aceite: 01/03/2022

Raquel Sousa Oliveira
Universidade do Estado da Bahia, Campus VII

Américo Junior Nunes da Silva
Universidade do Estado da Bahia, Campus VII

RESUMO: Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa qualitativa e exploratória do tipo bibliográfica e documental, intitulada "Os cursos presenciais de Licenciatura em Matemática das Universidades públicas da Bahia: como articulam os conhecimentos necessários à docência?" que objetivou compreender como os diferentes conhecimentos necessários à docência são apresentados e se articulam nas propostas curriculares dos cursos presenciais de Licenciatura em Matemática, de instituições públicas da Bahia. Para isso, portanto, realizamos uma análise dos Projetos Pedagógicos dos cursos e das resoluções e portarias que os subsidiaram. Para a análise de dados fizemos uso da análise qualitativa, segundo orienta Gil (2007). Esta pesquisa, portanto, entendeu como os cursos articulam os diferentes conhecimentos necessários à docência, para a formação do futuro professor de Matemática; e isso, de certa forma, possibilitará um repensar desses cursos atendendo às questões demandadas pela contemporaneidade e orientadas pelos dispositivos legais, para contribuir com as aprendizagens Matemática e a ressignificação da forma como essa ciência é muitas vezes percebida.

PALAVRAS-CHAVE: Formação de Professores; Currículo; Educação Matemática; Conhecimentos docentes.

THE IN-CLASS LICENSE COURSES IN MATHEMATICS AT THE PUBLIC UNIVERSITIES OF BAHIA: HOW DO THEY ARTICULATE THE KNOWLEDGE NECESSARY FOR TEACHING?

ABSTRACT: This article presents the results of a qualitative and exploratory research of the bibliographic and documentary type, entitled "The on-site Mathematics Licentiate courses at public universities in Bahia: how do they articulate the knowledge necessary for teaching?" which aimed to understand how the different knowledge necessary for teaching are presented and articulated in the curricular proposals of the presential courses of Licentiate in Mathematics, from public institutions in Bahia. For this, therefore, we carried out an analysis of the Pedagogical Projects of the courses and of the resolutions and ordinances that subsidized them. For data analysis, we used qualitative analysis, according to Gil (2007). This research, therefore, understood how the courses articulate the different knowledge necessary for teaching, for the formation of the future Mathematics teacher; and this, in a way, will make it possible to rethink these courses, taking into account the issues demanded by contemporaneity and guided by legal provisions, to contribute to Mathematics learning and the resignification of the way this science is often perceived.

KEYWORDS: Teacher Training; Resume; Mathematics Education; Teaching knowledge.

INTRODUÇÃO

As universidades, como destacou Silva (2014), desempenham um papel importante na formação dos professores que atuarão na Educação Básica do País. Nesse sentido, ainda segundo o autor, faz-se necessário repensar constantemente a estrutura dos cursos de licenciatura em busca de melhores condições para a qualificação desses profissionais, dentre os quais se encontram os professores de Matemática.

O atual cenário político educacional brasileiro, tendo em vista as avaliações externas e internas realizadas, apresenta uma grande problemática quanto ao ensino de Matemática: as dificuldades de aprendizagem. Sobre isso, D'Ambrosio (2011, p. 12) aponta que também "o baixo rendimento avaliado pelos testes é, muito possivelmente, resultado do descompasso entre os desafios de uma sociedade em rápida transformação e o conservadorismo das escolas".

Julgamos importante apontar que esse descompasso atinge também a formação de professores, tendo em vista que, por muito tempo, essa formação foi "brutalizada culturalmente" (FERNANDES, 2010, p. 120). Quer isto dizer que a necessidade de uma seriedade científica com a Educação não foi levada em conta por muito tempo na história da educação do país (SILVA, 2014).

Como se sabe, a Matemática é considerada por muitos como uma ciência difícil, pouco acessível e descontextualizada das diversas situações cotidianas. Segundo D'Ambrosio (2006), desconstruir essa imagem configura-se como um dos principais desafios em busca de uma educação matemática verdadeiramente de qualidade. Na direção desse desafio, os cursos de formação inicial precisam construir propostas que dialoguem com as escolas da Educação Básica, como destacou Silva (2020).

Concebemos enquanto formação inicial, nesse momento e para este trabalho, partindo de Silva (2014; 2018), como o primeiro momento que prepara o sujeito para ingressar na profissão. Para a construção dessa concepção, recorremos a discussões como a de Imbernón (2009), que pontua que é na formação inicial que o futuro professor deve aprender e, Pimenta (1996), que destaca que é no momento inicial da formação que o estudante começa a ver-se como professor, permitindo-se construir sua identidade docente.

Partimos do pressuposto de que, assim como qualquer outra atividade profissional, a docência requer um conjunto de conhecimentos que são necessários e indispensáveis. Muitas dessas aprendizagens para a profissão acontecem, e deve realmente se efetivar, no espaço de formação inicial, o qual deve possibilitar a construção de conhecimentos necessários para o trabalho docente (SILVA; 2014; 2018).

Vale destacar que entendemos por conhecimentos necessários a docência, nesse momento, como aquilo que os "professores deveriam saber, fazer, compreender ou professar para converter o ensino em algo mais que uma forma de trabalho individual

e para que seja considerada entre as profissões prestigiadas" (SHULMAN, 2005, p. 5). Ainda segundo Shulman (2005, p. 11), são sete, no mínimo, as categorias da base de conhecimentos do professor; falaremos mais sobre eles na discussão teórica deste texto.

Voltamos, assim, ao que pontuamos no início: a importância de articular os diversos conhecimentos na formação inicial do professor de Matemática. Nessa direção justifica-se a realização desta pesquisa por ser ela uma ferramenta importante no repensar dos cursos baianos em busca de uma oferta de formação que atenda às demandas contemporâneas.

É preciso (re)pensar os cursos de formação inicial de professores de Matemática no intuito de oferecer uma formação que articule os diferentes conhecimentos necessários à docência e que sejam pensados de forma que contribuam para a constituição da identidade docente e as diversas realidades das escolas públicas do estado e país, não hierarquizando os diferentes conhecimentos como mais ou menos importante.

Nesse sentido, esta investigação, que se constitui como Trabalho de Conclusão de Curso, apresenta como questão de pesquisa: Como os diferentes conhecimentos necessários à docência se articulam nas propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática da Bahia? Trata-se de uma pesquisa financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB), aprovada pelo edital 013/2019 da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade do Estado da Bahia (UNEB) e realizada no espaço do Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (LEPEM/CNPq).

METODOLOGIA

Pela natureza da pesquisa aqui proposta, pensamos ser pertinente defini-la como qualitativa, sobretudo, por considerar a subjetividade que há no problema (BORBA, 2004). Ainda segundo o autor, importa-nos que a este tipo de pesquisa cabe entender que a verdade não é rígida. As diversas características que constituem uma pesquisa dessa natureza, como "a transitoriedade de seus resultados; a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; [...]" (GARNICA, 2004, p. 86), não devem ser vistas como regras uma vez que o próprio entendimento do que é pesquisa qualitativa está em movimento e essas noções levam a ênfases diferentes (BORBA 2004).

Com vistas a classificar o trabalho aqui proposto, partindo da relação entre ele e as características apresentadas acima, nos cabe categorizá-lo, também, enquanto documental; tendo em mente que "a pesquisa documental vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa." (GIL, 2002, p. 45).

Para esta pesquisa, em particular, teremos como documento importante para o movimento de produção de dados o Projeto Pedagógico de Curso (PPC); e, por isso,

pensamos ser importante defini-los. Mais um destaque necessário é que olharemos, apenas, para o currículo prescrito, ou seja, o que foi textualizado. Libâneo (2007) define currículo prescrito como aquele que resulta de uma organização normativa ou projeto pedagógico.

Entendemos por currículo, fundamentando-se em Sacristán (2000), como algo que se relaciona com a instrumentalização concreta que faz da escola ou universidade, por exemplo, um determinado sistema social, "pois é através dele que lhe dota de conteúdo, missão que se expressa por meio de usos quase universais em todos os sistemas educativos, embora por condicionantes históricos e pela peculiaridade de cada contexto [...]" (SACRISTÁN, 2000, p. 35). Vale destacar, ainda partindo do que nos evidenciou o autor anteriormente referenciado, a flexibilidade e abertura para as questões sociais, configurando uma dinâmica que não permite percebe-lo de forma estática e cristalizada; pelo contrário, trata-se de algo vivo. Por essa vivacidade, por exemplo, precisamos perceber que o currículo não é inocente, despretensioso ou neutro e, ele traz questões ideológicas e de poder demarcadas (MENEZES, 2009).

Nesse momento, após essa classificação inicial, apresentaremos os procedimentos e instrumentos utilizados na pesquisa. Para isso partiremos dos objetivos propostos, na tentativa de nos permitir ser mais bem entendidos.

Em um primeiro momento, identificamos os cursos presenciais e de instituições públicas que oferecem, no Estado da Bahia, a Licenciatura em Matemática, para isso realizamos um mapeamento no site oficial do Ministério da Educação[1].

Para esse primeiro momento, usamos como filtros de pesquisa: i) Curso de graduação; ii) Matemática; iii) Bahia; iv) Presencial; v) licenciatura; vi) Em atividade. Obtivemos para os descritores apresentados 46 resultados. A partir disso acessamos todos os sites oficiais das instituições listadas e identificamos que algumas dessas instituições ofertavam cursos em outra modalidade como o PARFOR, por exemplo. Nessa direção, decidimos olhar apenas para os cursos presenciais de instituições públicas e oferecidos na modalidade regular.

Após acessar os sites das instituições para verificar a existência do curso, buscamos os Projetos Pedagógicos de Curso das licenciaturas em Matemática. Em posse desses documentos curriculares dos cursos públicos de Licenciatura em Matemática da Bahia, analisamos como os diferentes conhecimentos necessários à docência são apresentados. Para isso, o nosso olhar para os PPC partirá de categorias baseadas na classificação apresentada por Shulman (2005) e dos documentos legais (Resoluções, Leis etc.) que orientam, no Brasil, a formação de professores e os cursos de licenciatura, em particular, que ensina Matemática.

As propostas curriculares desses cursos podem apresentar trajetórias formativas, com proposição de cursos de extensão, espaços de formação como laboratórios, disciplinas obrigatórias e optativas, entre outras. Coube-nos, portanto, identificá-las, entendendo-as

1 https://emec.mec.gov.br

como parte de um dos eixos que se articulam para a formação de professores.

Após essa categorização, nos ativemos a entender como os diferentes conhecimentos necessários à docência, nas propostas curriculares dos cursos pesquisados, se articulam para a formação do futuro professor de Matemática. Existe a supervalorização de algum conhecimento em detrimento de outro? Como esses currículos conseguem, pela proposta apresentada, articulá-los? São essas algumas perguntas que tentamos responder durante esse momento da pesquisa e tendo como base o projeto pedagógico dos cursos mapeados.

Tendo em vista os dados que foram produzidos, decidimos por ser mais coerentes construir uma análise qualitativa, orientando-nos em Gil (2007, p. 24): esta análise reúne uma série de técnicas "que envolve a redução dos dados, a categorização desses dados, sua interpretação e a redação do relatório".

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para iniciar esse texto de fundamentação teórica, consideramos pertinente realizar um caminho histórico acerca dos primeiros cursos de Matemática criados no Brasil e na Bahia. Entendemos que, ao olhar para a forma como esses cursos foram concebidos, compreenderemos algumas das trajetórias que perduraram nas licenciaturas no país. Teremos como recorte temporal as décadas de 1930 e 1940, por ter sido nesse período que os primeiros cursos de Matemática, como evidenciado por Silva (2020), foram criados.

O primeiro curso de Matemática no Brasil foi criado por volta de 1930, na Universidade de São Paulo, como apresentado por Salandim, Fernandes e Garnica (2011). Concordando com esses autores e abordando sobre esse curso, "três anos iniciais eram responsáveis pela formação do pesquisador, e o ano seguinte, do profissional de educação" (SILVA, 2010, p. 05). Via-se, claramente, uma categorização do curso que ficou conhecida, como destaca Gatti (2010), de formação 3 + 1.

Ainda partindo do evidenciado anteriormente, entendemos que o primeiro curso de licenciatura em Matemática no Brasil tinha um modelo de formação que separava formação pedagógica da formação referente aos conteúdos da Matemática. Nesse formato, chamado de 3+1, via-se claramente nos primeiros anos uma preocupação com os conceitos matemáticos e, só depois desse processo, uma preocupação com a formação pedagógica.

Esse modelo de formação, que hierarquiza os conhecimentos necessários à docência, se constitui enquanto um espaço que não vê a sala de aula, futuro espaço de construção profissional, como importante para o momento da formação. O currículo, nessas situações, não era "construído de maneira a contemplar as necessidades dos seus agentes sociais, a atender à função básica do processo de ensino-aprendizagem, e a formação dos profissionais está voltada para o atendimento a essa demanda" (MENEZES, 2009, p. 202).

Desta forma, fica nítido que é preciso o professor se adaptar ao contexto social ao qual está trabalhando, criando assim a necessidade de componentes curriculares que

ajudem o futuro professor com esses contextos. Por isso, portanto, pensar a formação de professores a, desde o princípio, compreender a sala de aula como importante é necessário. Nesse caso, ao olhar para a forma como esse primeiro curso de Matemática se organizava, entendemos que muitos ranços podem ter se mantido.

Ainda sobre o ranço que apontamos anteriormente, se olharmos para muitos cursos atualmente, perceberemos que

> ainda é visível, com grande frequência nos cursos de licenciatura, o olhar de desprestígio que alguns professores, principalmente dos que trabalham com as disciplinas mais específicas, lançam em relação às disciplinas pedagógicas, como se estas não fossem necessárias para a formação profissional do futuro professor (SILVA, 2014, p. 35).

Isso, que apontamos anteriormente e manifesto na fala de Silva (2014), só reforça o quanto ainda pode existir, em muitos cursos de licenciatura, o preconceito com as disciplinas pedagógicas como se não fossem fundamentais para a formação profissional do educador/educadora. Isso pode reverberar e acontecer, algumas vezes, de forma velada e sendo reflexos de toda uma trajetória histórica que começamos a falar no início desse texto.

Nessa direção, ao olhar e discutir sobre o primeiro curso do Brasil, surgiu a necessidade de conhecer o primeiro curso da Bahia, uma vez que olharemos, com essa pesquisa, para os cursos desse estado. Sobre esse curso, cabe considerar que Dias (2002 p. 24) relata que "em 1941, na Bahia, a Faculdade de Filosofia Ciências e Letras (FFCL) foi fundada pelo professor Isaías Alves, objetivando a profissionalização da atividade docente e também a formação de professores de Matemática".

Na época, como evidência Silva (2014), não existiam professores de Matemática com formação específica, os profissionais que atuavam ensinando esse componente curricular eram pessoas que dominavam esses conceitos, como os engenheiros, seminaristas e militares. Nesse sentido, portanto, não foi diferente de quando ocorreu a criação do curso de Matemática no Brasil e, particularmente na Bahia. Os primeiros professores do curso eram estrangeiros e, também, outros profissionais locais como médicos, engenheiros, advogados, pessoas que eram consideradas intelectuais no local. O curso da Bahia seguia, de forma geral, o mesmo princípio do primeiro curso criado em São Paulo, na FFCL.

Levando em consideração a história dos primeiros cursos citados acima e comparando com os cursos que temos hoje, é notório o quanto a educação é viva e quanto ela evoluiu ao passar dos anos junto com as tecnologias criadas, os assuntos descobertos e a realidade em que vivemos. Como pontua Souza (2018, p. 15) "a educação está presente em todas as sociedades e passa por diversas mudanças ao longo do tempo".

Quando um discente opta por um curso de licenciatura é inevitável não se lembrar da sua trajetória durante sua vivência na escola básica. A princípio, temos como base de ensino tudo que aprendemos, e como aprendemos na escola, principalmente os métodos que os antigos professores usavam para mediar o conteúdo. No entanto, a educação está

em constante evolução, segundo David et al. (2021, p. 01):

> o processo de ensino-aprendizagem precisa ser cada vez mais valorizado, uma vez que só e somente ele poderá dar aos alunos as condições para que construam conhecimentos e não sejam apenas receptores, 'repetidores', de informações que são, aos mesmos, transmitidas.

Todo dia surge algo novo, sejam livros novos, com linguagem mais moderna, matérias que auxiliem no ensino/aprendizagem e principalmente a inclusão da tecnologia tanto nas escolas quanto fora dela.

Os discentes dos cursos de licenciatura em Matemática podem enfrentar uma dificuldade em sua futura trajetória como educador, que é a falta de interesse dos alunos em Matemática. Existe um tabu muito grande sobre a Matemática, que ela é difícil, que ela é chata e que não é interessante. Para que essa situação seja revertida o professor necessita de um preparo adequado para lidar com essa situação e que ela possa ser transformada; mostrar para o aluno que a matemática pode sim ser muito interessante. Tendo em vista isso, faz-se necessário que as universidades possam preparar de forma adequada seus discentes para sala de aula. Para além disso, o futuro educador também deve se auto avaliar no sentido de melhorar a sua metodologia em sala de aula.

Para que isso que apontamos anteriormente seja possível, como evidencia o Parecer n° 009/2001 aprovado em 08 de maio de 2001, faz-se necessário a construção de um percurso de formação inicial articulado com a Escola da Educação Básica. Muito mais do que saber o conteúdo, por exemplo, deve ser exigido nesses cursos; e o voltar o olhar ao futuro espaço de atuação profissional pode contribuir para o entendimento dos conhecimentos que são necessários à docência.

Segundo Shulman (2005, p. 11), são sete, no mínimo, as categorias da base de conhecimentos do professor: o conhecimento do conteúdo; o conhecimento pedagógico (conhecimento didático geral), tendo em conta aqueles princípios e estratégias gerais de condução e organização da aula, que transcendem o âmbito da disciplina; o conhecimento do *currículum,* considerado como um especial domínio dos materiais e os programas que servem como «ferramentas para o ofício» do docente; o conhecimento dos alunos e da aprendizagem; o conhecimento dos contextos educativos, que abarca desde o funcionamento do grupo ou da aula, a gestão e financiamento dos distritos escolares, até o caráter das comunidades e culturas; o conhecimento didático do conteúdo, destinado a essa especial amálgama entre matéria e pedagogia, que constitui uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma particular de compreensão profissional; e, por fim, o conhecimento dos objetivos, as finalidades e os valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos.

Esses conhecimentos são importantes para a realização do trabalho docente, mas ainda é perceptível que nem todos os professores sabem lidar com esses fatores. Outro desafio, já citado anteriormente, é o fato de que muitos alunos ainda enxergam a matemática

como uma disciplina chata e desconectada da realidade. Para lidar com isso, surge a ideia do Conhecimento Lúdico e Pedagógico do Conteúdo (CLPEC), que nasce com a intenção de "aproximar o estudante da Matemática para que ela própria seja percebida como lúdica e que o processo de matematizar seja constituído com prazer" (SILVA, 2020, p. 5).

A resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019, que "define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação)" diz em seu Art. 4º que as três dimensões fundamentais das competências específica desses professores são: conhecimento profissional, prática profissional e engajamento profissional. Essas três bases podem ser moldadas e adaptadas para o melhor desempenho da profissão.

As universidades brasileiras seguem a legislação do país para fundamentar e direcionar as suas atividades. Pensando nisso, foram analisadas as resoluções, leis, pareceres e outros documentos legais que se fazem presentes nos documentos analisados e na estrutura informacional das universidades brasileiras, com o intuito de observar a influência que a legislação tem sobre a elaboração dos cursos de Licenciatura em Matemática do Estado da Bahia.

A RESOLUÇÃO CNE/CP 1, DE 18 DE FEVEREIRO DE 2002, que fala sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica apresenta em seu Art. 2º que a organização curricular das instituições deverá observar formas de orientação que contribuam para a atividade docente, como: o ensino visando aprendizagem, acolhimento e diversidade, atividades que enriqueçam a cultura, práticas investigativas, elaboração de projetos de desenvolvimento dos conteúdos, uso de tecnologias da informação e comunicação e o desenvolvimento do trabalho em equipe.

No Art. 3º são apresentados os pontos principais que devem ser levados em conta no processo de formação dos professores, como a competência na orientação do curso, a coerência entre a formação e a prática do futuro professor e a pesquisa que foque no processo de aprendizagem e ensino, já que para um professor ensinar sobre determinado assunto ele precisará conhecer o bastante para que não ocorram confusões no momento de ensino. Nos seguintes artigos são apresentados outros pontos que devem ser considerados na elaboração desses cursos, como as competências relacionadas com os valores da sociedade, as competências relacionadas ao papel social da escola, as competências sobre o conhecimento pedagógico e sua prática e as competências sobre o desenvolvimento profissional.

No PARECER CNE/CES Nº: 15/2005, que foi aprovado em 2 de fevereiro de 2005, estão presentes os esclarecimentos sobre a RESOLUÇÃO CNE/CP 1, DE 18 DE FEVEREIRO DE 2002 e, o principal ponto observado é que:

> As disciplinas relacionadas com a educação que incluem atividades de caráter prático podem ser computadas na carga horária classificada como

> prática como componente curricular, mas o mesmo não ocorre com as disciplinas relacionadas aos conhecimentos técnico-científicos próprios da área do conhecimento para a qual se faz a formação. Por exemplo, disciplinas de caráter prático em Química, cujo objetivo seja prover a formação básica em Química, não devem ser computadas como prática como componente curricular nos cursos de licenciatura. Para este fim, poderão ser criadas novas disciplinas ou adaptadas as já existentes, na medida das necessidades de cada instituição (PARECER CNE/CES Nº: 15/2005, p. 3).

Outro documento analisado foi o PARECER Nº CNE/CP 009/2001 que discute sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais que auxiliarão na Formação de Professores da Educação Básica do Brasil. Falando sobre a reforma curricular que ocorreu na época, o parecer mostra que as transformações científicas e tecnológicas exigem que as pessoas busquem novas aprendizagens ao longo da vida, visando também que a comunicação oral e escrita está cada vez mais atrelada com a comunicação eletrônica, acelerando a disseminação de informações. Outro ponto importante deste parecer é o fato de que o profissional de ensino tem como tarefa principal cuidar da aprendizagem de seus alunos, respeitando sempre as diversidades pessoal, social e cultural de cada indivíduo.

Além disso, uma revisão de aspectos essenciais para a formação de professores é necessária para que a formação docente seja fortalecida principalmente no que diz respeito aos processos de mudança que ocorram nas instituições formadoras. Já sobre a interdisciplinaridade, é observada a necessidade de indicar para os alunos, de forma clara e objetiva, qual a relação estabelecida entre o que se está aprendendo na licenciatura e o que ele ensinará para os alunos de ensino fundamental e médio, identificando os obstáculos epistemológicos, didáticos e a relação deles com o mundo real. Esses pontos devem estar presentes no processo de formação do professor.

ANÁLISE DOS DADOS

Esta seção destina-se a análise dos dados produzidos ao longo da pesquisa. Organizaremos as informações a partir de categorias criadas a partir dos objetivos específicos da pesquisa: i) Identificar os cursos presenciais que oferecem, no Estado da Bahia, a Licenciatura em Matemática; ii) Analisar, a partir do estudo das propostas curriculares desses cursos e dos documentos normativos oficiais que o subsidiaram, como os diferentes conhecimentos necessários à docência são apresentados; iii) Entender como os diferentes conhecimentos necessários a docência, nas propostas curriculares dos cursos pesquisados, se articulam para a formação do futuro professor de Matemática.

IDENTIFICANDO AS LICENCIATURAS PRESENCIAIS EM MATEMÁTICA DA BAHIA

Em um primeiro momento, identificamos os cursos presenciais e de instituições

públicas que oferecem, no Estado da Bahia, a Licenciatura em Matemática, para isso realizamos um mapeamento no site oficial do Ministério da Educação[2].

Para o primeiro momento, e partindo dos descritores que apresentamos na metodologia deste trabalho, acessamos o site do MEC para encontrar os cursos de licenciatura em Matemática, presenciais e de instituições públicas da Bahia. Desse primeiro movimento, após excluir os cursos que não se encaixavam no perfil regular de oferta, como os do PARFOR, criamos o seguinte quadro.

UNIVERCIDADE/ CAMPUS	CIDADE	ANO DE CRIAÇÃO DO CURSO	PPC ATUAL
Instituições Federais			
IFBA	Eunápolis	2005	2017
IFBA	Camaçari	2012	2019
IFBA	Salvador	2011	2015
IFBA	Barreiras	2014	2017
IFBA	Valença	2010	2019
UFBA (diurno)	Salvador	1942	2008
UFBA (noturno)	Salvador	1942	2008
UFOB	Barreiras	2008	2016
UFRB	Amargosa	2006	2007
UFRB	Cruz das almas	2013	2018
UFSB	Itabuna	2014	2016
UFSB	Porto Seguro	2014	2016
UFSB	Teixeira de Freitas	2014	2016
Instituições Estaduais			
UNEB	Alagoinhas	2004	2011
UNEB	Barreiras	2006	2011
UNEB	Caetité	2004	2010
UNEB	Paulo Afonso	2004	2012
UNEB	Senhor do Bonfim	2004	2011
UNEB	Teixeira de Freitas	2004	2012
UEFS	Feira de Santana	1987	2018
UESB	Vitoria da Conquista	2004	2010
UESB	Jequié	2005	2010

2 https://emec.mec.gov.br

UESC	Ilhéus	1999	2006

Quadro 01: Instituições de Ensino Superior do Estado da Bahia que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática.

Fonte: (E-MEC e arquivos pessoais dos pesquisadores. Suzart, L. A, Santos V. C, Oliveira, R. S. 2021).

Após a organização do quadro, as unidades em questão foram localizadas no mapa do estado da Bahia para uma melhor visualização de onde as unidades se encontram, como mostra a imagem a seguir:

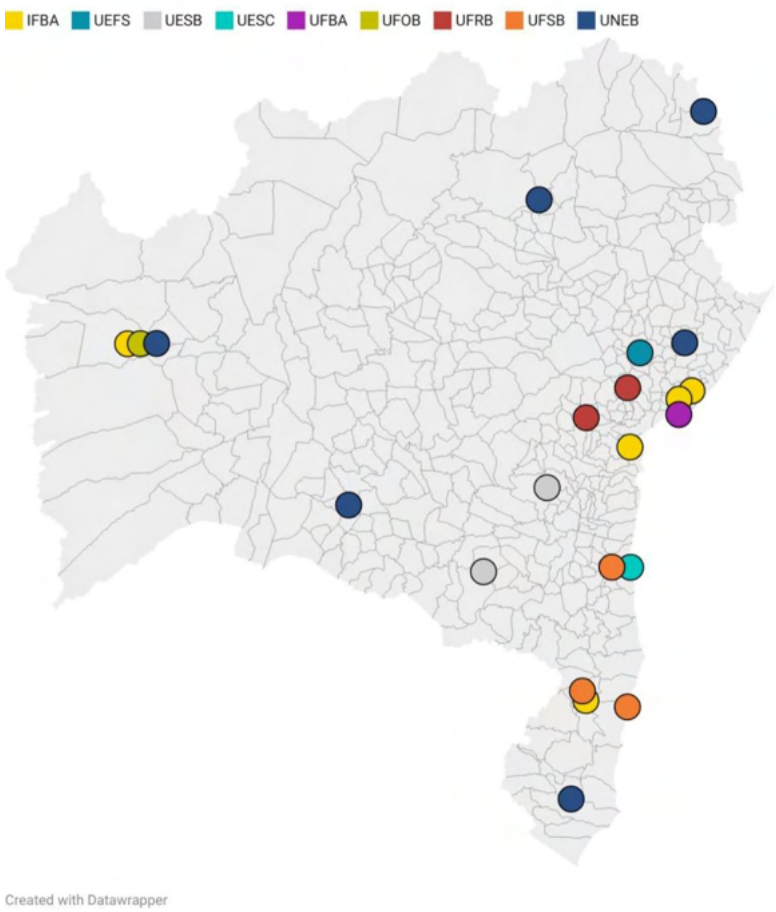


Imagem 1 - Mapa das unidades.

Fonte: Suzart, L. A, Santos V. C, Oliveira, R. S. 2021.

O quantitativo de cursos ofertados por instituições públicas federais (13) é superior aos oferecidos pelos órgãos estaduais (10). Dos 10 cursos de instituições estaduais,

apenas dois deles não foi criado no intervalo de 2004 a 2006, no caso dos cursos da UEFS e UESC. Já os 13 cursos de instituições federais intervalam, em sua grande maioria, o período de 2005 a 2014; Percebemos que houve, em um mesmo período, um aumento de oferta para essas licenciaturas, o que nos revela um investimento na criação de cursos de 2004 a 2014, como forma, também, de atender o que é regimentado pela Lei nº 9.394/96. Essas Instituições de Ensino Superior (IES) encontram-se espalhadas pelo estado da Bahia, como apresenta a imagem 01.

O QUE REVELAM OS SEUS PPC

A Proposta Pedagógica Curricular (PPC) é um documento que serve para estruturar, sistematizar e fundamentar a organização do conhecimento nas instituições de ensino bem como selecionar os conteúdos mais importantes para a formação dos estudantes (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO). Neste tópico serão discutidos e analisados alguns PPC dos cursos mapeados, para que se possa entender melhor como as universidades priorizam os componentes curriculares, no movimento de formar professores e professoras de Matemática. Vale destacar que os documentos aqui analisados foram coletados dos sites oficiais das instituições, sobretudo levando em consideração os espaços destinados aos cursos pesquisados e compuseram esta pesquisa.

Após acessar os sites das instituições para verificar a existência do curso, buscamos os Projetos Pedagógicos de Curso das licenciaturas em Matemática. Em posse desses documentos curriculares dos cursos públicos de Licenciatura em Matemática da Bahia, analisamos como os diferentes conhecimentos necessários à docência são apresentados. Para isso, o nosso olhar para os PPC partirá de categorias baseadas na classificação apresentada por Shulman (2005) e dos documentos legais (Resoluções, Leis etc.) que orientam, no Brasil, a formação de professores e os cursos de licenciatura, em particular, que ensina Matemática.

O primeiro PPC analisado pertence ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), do campus de Eunápolis. Criado em 2005 e com último PPC construído em 2017, tem o tempo mínimo de integralização reconhecido como 9 semestres e o máximo de 14 semestres. O PCC, em uma de suas primeiras páginas, descreve o curso como algo que “habilitará os estudantes na Licenciatura em Matemática. O profissional licenciado nesse curso estará apto a lecionar disciplinas de Matemática na Educação Básica, em todos os seus níveis e modalidades” (PPC IFBA, 2017, p. 10).

Tendo como um dos principais objetivos para o Curso de Licenciatura em Matemática poder ajudar o aluno a conhecer e refletir sobre o pensamento contemporâneo da matemática, a instituição também valoriza o contato social nos trabalhos em grupo e pretende “dar ênfase às inúmeras possibilidades de uso da matemática no cotidiano das pessoas” (PPC IFBA, 2017, p. 28).

O IFBA da cidade de Camaçari, criado em 2012, teve a sua última versão do PCC criado em 2019 e, além da missão de formar professores para atuar na Educação Básica e Profissional, pretende ensinar esse educador a "refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica" (PPC IFBA, 2019, p. 8), visando uma ação prática que gere conhecimentos. Essa ação prática pode servir para refletir sobre novas maneiras de abordar a matemática para os alunos, gerando um maior interesse.

Em 2015 foi ressignificado o PPC do IFBA localizado em Salvador que, além das semelhanças com os PPC citados anteriormente, tem como parte de seu objetivo experimentar novas propostas considerando a evolução dos estudos da Matemática. Para isso, pretende-se "capacitar o discente a compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologia" (PPC IFBA, 2015, p. 7) e estimular uma comunicação escrita e oral que seja clara e precisa para os seus alunos, facilitando assim o ensino da disciplina.

Visando o perfil que seu egresso deverá ter após a conclusão do curso, o IFBA pretende realizar uma

> formação que o prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional, carregado de incertezas e conflitos, constituindo em um espaço dialético de criação e reflexão, no qual novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente; (PPC IFBA, 2015, p. 11).

Para lidar com esses desafios, esse futuro docente deve ter a habilidade de manter as aulas embasadas e procurar conteúdos que estabeleçam conexões interdisciplinares com as outras áreas, para que a Matemática não seja uma disciplina isolada. Além disso, há a necessidade de desenvolvimento de estratégias que estimulem a criatividade e autonomia dos futuros alunos desses egressos, entendendo a prática de ensino da Matemática como um processo dinâmico.

Orientado pela resolução nº 02/2015, cabe destacar que o curso do IFBA em Salvador tem a sua base curricular formada por cinco núcleos: o Núcleo de Formação Básica (NFB), o Núcleo de Formação Pedagógica (NFP), o Núcleo de Formação Específica (NFE), o Núcleo de Formação Complementar (NFC e o Núcleo de Optativas (NOP). Todos esses cinco Núcleos são importantes para o desenvolvimento do curso, mas queremos citar, especialmente, o Núcleo de Formação Pedagógica, que procura

> [...] desenvolver competências educativas necessárias à formação do professor de matemática, objetivando fundamentar a sua prática pedagógica com um referencial teórico-prático voltado para o contexto social, contexto escolar e contexto da aula (PPC IFBA, 2015, p. 15).

Já no PPC do IFBA de Valença, é reforçada a necessidade de saber calcular, argumentar e lidar com as informações de forma estatística para que um cidadão possa exercer a sua cidadania. Para isso, a aula de Matemática deve obter êxito ao ligar a disciplina aos acontecimentos cotidianos da sociedade. Também é visado formar profissionais que

estejam conscientes de sua responsabilidade social e que tenham uma conduta profissional baseada “nos princípios da sustentabilidade crítica e dos critérios humanísticos” (PPC IFBA, 2019, p. 14). Esperando que o seu egresso esteja ciente da importância da inclusão social, o PPC também visa que esse egresso saia do instituto sabendo solucionar os problemas que estejam ligados ao ensino da Matemática.

O último PPC do IFBA pertence ao campus de Barreiras e tem em sua estrutura muitos pontos em comum com os já citados anteriormente, tendo como intenção dar respostas aos desafios da sociedade que estejam relacionados à escolarização nos níveis básico e profissional da Matemática. Partindo do que diz respeito a exercer a cidadania através da matemática, é reconhecido que, para obter êxito no processo de ensino-aprendizagem, é necessário “realizar experiências concretas, vivenciando dinamicamente os conteúdos que lhe forem propostos, respondendo positivamente ao mundo que o rodeia, através de conceitos construídos e interiorizados” (PPC IFBA, 2017b, p. 10).

O PPC da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), reestruturado em 2018, conta com uma lista de alterações que ocorreram no projeto pedagógico do curso entre os anos de 1987 a 2002, alterações como a inclusão da disciplina Política e Gestão Superior, a inclusão de “Inclusão de 13 disciplinas já pertencentes ao quadro de ofertas da Instituição no elenco de disciplinas complementares optativas;” e a exclusão da disciplina Política Educacional e Organizacional da Educação Básica e Superior (PPC UEFS, 2018, p. 18). Em um segundo quadro, são apresentadas as alterações ocorridas entre 2006 e 2014, alterações como a inclusão das disciplinas optativas Álgebra Linear Avançada e Estruturas Algébricas II, inclusão da disciplina Libras, que visa uma melhor inclusão, e a mudança da disciplina Técnica de Pesquisa e Produção Científica para o Departamento de Ciências Exatas.

Além dessas alterações, o documento apresenta que o licenciado em matemática deve ter competências como: preparar materiais didáticos que facilitem a aprendizagem, favorecer a criatividade e autonomia do pensamento matemático dos estudantes e ter a prática da docência em matemática como algo que está em uma “(re)criação” constante (PPC UEFS, 2018, p. 25).

Também são apresentados, no mesmo documento, os núcleos que estruturam o Curso de Licenciatura em Matemática, sendo eles:

- Núcleo do Conhecimento Científico e Cultural
  - o Eixo do Conhecimento Matemático
  - o Eixo do Conhecimento Pedagógico
  - o Eixo da Autonomia Intelectual e Profissional
- Núcleo da Formação Prática
  - o Eixo do Estágio Supervisionado
  - o Eixo da Prática como Componente Curricular
- Núcleo da Formação Eletiva

o Eixo das Disciplinas Optativas

o Eixo das Atividades Complementares (PPC UEFS, 2018, p. 28).

A Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) apresenta em seu PPC (2010) um ponto muito parecido ao citado anteriormente. No documento diz que uma das capacitações que o Licenciado em Matemática deve ter é a capacidade de criar e adaptar, em seu ambiente de trabalhos, os métodos pedagógicos. O profissional que consegue se adaptar tem mais facilidade em lidar com os obstáculos que possam aparecer em seu caminho. Além disso, é necessário ter habilidades como: "trabalhar com conceitos abstratos na resolução de problemas", ter uma formação filosófica, científica, tecnológica e cultural sólida e, entre outros, saber dar "resposta aos desafios que a sociedade lhe coloca" (PPC UESB, 2010, p. 25-26).

A Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), localizada em Ilhéus, teve o seu PPC criado em 2006 e conta com o Laboratório de Pesquisa e Ensino de Matemática em Ambiente Computacional (LAPEM), que é destinado também para "aulas das disciplinas do curso que têm como metodologia a utilização de linguagens de programação e softwares matemáticos ou educativos" (PPC UESC, 2006, p. 16) e estimula que sejam utilizados softwares livres pelos alunos da Instituição.

O PPC ainda aposta na "prática pedagógica como eixo articulador" das relações íntimas entre as disciplinas da formação em Matemática (PPC UESC, 2006, p. 32), considerando como profissional competente aquele que sabe manter um diálogo entre os "saberes historicamente construídos da matemática e das ciências da educação". O professor a ser formado pelo curso também deverá desenvolver ações educacionais, científicas e pedagógicas, partindo de uma visão que "valorize a multiplicidade de dimensões do ser humano" (PPC UESC, 2006, p. 33).

A Universidade do Estado da Bahia (UNEB) é composta por diversos campi que estão espalhados pela Bahia. No PPC do campus de Alagoinhas são apresentados os diversos recursos que a Universidade e a unidade oferecem para aqueles que fazem parte dela, como laboratórios, residência universitária, auditórios e sala de servidores. Conhecido como o Campus II da UNEB, o campus de Alagoinhas entende a avaliação como um "processo acolhedor" que repensa as ações relacionadas à docência, pesquisa, extensão e as atividades administrativas e busca "desenvolver processos democráticos de avaliação, proporcionando aos discentes dos seus cursos a construção significativa do conhecimento" (PPC UNEB, 2011a, p. 122).

Em Barreiras, a UNEB se mostrou um local importante para a troca de conhecimentos e culturas, pois foi a única universidade pública da região até a instalação do Núcleo Avançado da UFBA, que ocorreu em 2006. Ainda em Barreiras, a UNEB tem um potencial econômico que se destaca, principalmente, com o avanço do agronegócio da região. Outra importância destacada no documento foi que a implantação do curso de Matemática na

região contribuiu para o avanço do Ensino Fundamental e Médio, já que houve um número de profissionais que se graduou atuando na disciplina.

A UNEB de Caetité tem o PPC publicado no ano de 2010 e tem como missão "formar profissionais do magistério para a docência do Ensino Fundamental e Médio" (PPC UNEB, 2010, p. 54) para contribuir com a educação da região. Localizado no município de Caetité, que possui uma área de 2.306 km² e população estimada em mais de 48.000 habitantes, estima-se que o Curso de Matemática influencia diretamente em, pelo menos, 29 municípios, contribuindo também na economia local.

Ainda na UNEB, mas agora no campus de Paulo Afonso, é possível identificar no PPC (2012a, p. 138) que a Universidade visa formar profissionais que tenham a capacidade de se inserirem nas diversas realidades e que possuam "sensibilidade para interpretar as ações dos estudantes". Como já visto anteriormente, essa sensibilidade pode ser considerada um dos fatores mais importantes para um profissional educador, especialmente no âmbito da matemática que ainda é vista como uma área chata ou muito complicada para diversos estudantes. Caso as instituições consigam alcançar esse objetivo de formar profissionais sensíveis, o tato que eles terão para lidar com as dificuldades dos alunos pode colaborar com que a visão sobre a matemática seja mudada e isso atraia futuros profissionais matemáticos.

Outro aspecto importante citado no mesmo PPC é a intenção da Universidade em formar alunos que saibam "criar, planejar, realizar, gerir e avaliar situações dos alunos, fazendo uso [...] de temas sociais transversais ao currículo escolar, contextos sociais relevantes para a aprendizagem escolar [...]" (PPC UNEB, 2012a, p. 139). Essa habilidade de ligar o ensino aos contextos sociais e a realidade da sociedade pode ser utilizada como ponte de ligação entre a matemática e aqueles que têm maiores dificuldades no aprendizado.

No caso da UNEB de Teixeira de Freitas (2012b), é possível ver também que, no que diz respeito aos conteúdos curriculares do Curso de Licenciatura em Matemática, é buscado seguir os componentes comuns aos outros cursos de Licenciatura, também incluindo o que é proposto pela IES, que são disciplinas como: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Geometría, Geometría Analítica. Além das disciplinas citadas no documento, procura-se incluir:

> a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometría e Análise;
>
> b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;
>
> c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (PPC UNEB, 2012b, p. 121).

O campus de Senhor do Bonfim da UNEB apresenta em seu PPC (2011c, p. 122) que o curso de Licenciatura em Matemática foi criado para atender a "demanda de

formação e qualificação profissional" da área em que o campus está inserido. Já no que diz respeito a sua estrutura curricular, é dito que o curso é mais flexível, privilegiando a pesquisa e a prática pedagógica. Se apoiando nas diretrizes curriculares da Resolução CNE/CES de 3 de fevereiro de 2003, é estabelecido que essas diretrizes buscam aquilo que é essencial para formar um profissional, elaborando um currículo que seja "articulado, flexível, interdisciplinar" e que esteja pautado nos princípios de:

- Educação como um processo aberto, complexo e diversificado, que reflete, desafia e provoca transformações que contribuem para a construção de novos paradigmas culturais e estruturais;
- Ações formativas que promovam a interdisciplinaridade, entendendo-as como de extrema relevância à capacidade de lidar com questões complexas que oportunizem a compreensão da natureza do conhecimento matemático (PPC UNEB, 2011c, p. 136-137).

A Universidade Federal da Bahia (UFBA) tem o curso de Licenciatura em Matemática nos turnos diurno e noturno, e cada um tem o seu próprio PPC. O PPC do curso realizado no período diurno foi atualizado em 2008 e, em sua estrutura, apresenta os recursos físicos e educacionais que a instituição oferece para os discentes do curso. Um dos recursos apresentados é referente às atividades extracurriculares e tem como exemplo os projetos de Iniciação Científica, que inserem os alunos no ambiente da pesquisa.

Tanto o Bacharelado em Matemática quanto a Licenciatura têm seus objetivos particulares e os que são comuns a ambos os cursos, como "estimular a criatividade e a curiosidade científica", "propiciar ao profissional a iniciação à pesquisa" e "promover a aproximação da universidade com a unidade, através de programas de extensão, eventos científicos e estágios" (PPC UFBA, 2008a, p. 14). Além dessas, a Licenciatura tem os seus próprios objetivos, que são:

- Formar docentes para atuar na segunda fase do ensino fundamental [...];
- Propiciar ao profissional uma formação pedagógica para uma atuação no ensino fundamental e médio que possibilite o uso de metodologias de ensino inovadoras, inclusive com o uso de recursos computacionais;
- Propiciar ao docente uma formação geral complementar envolvendo outros campos de conhecimento necessários ao exercício do magistério (PPC UFBA, 2008a, p. 14).

Também há uma lista de habilidades que os discentes devem desenvolver durante o processo da licenciatura, como a habilidade de desenvolver estratégias que sejam capazes de estimular a criatividade do pensamento do educando, que pode contribuir para inovar no processo de aplicação dos problemas matemáticos durante a rotina do estudante e o leve a ter uma nova visão da área.

O Projeto Pedagógico de Licenciatura em Matemática do noturno também é datado no ano de 2008 e contém muitos pontos comuns referentes ao curso do diurno, porém, a sua carga horária total é menor. Além disso, o currículo está dividido em quatro eixos que

o norteiam: o Eixo Estruturante, o Eixo Pedagógico, o Eixo Integrador e o Eixo Acadêmico-Cultural. Cada eixo conta com as suas especificidades para que, juntos, façam parte da formação do discente.

Na cidade de Barreiras existe a Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB) que, com o seu PPC datado em 2016, tem como objetivo geral a formação de docentes que sejam qualificados para atuar na Educação Básica da área de Matemática. O PPC mostra que a organização curricular é composta por três núcleos, um para estudos de formação geral, um para aprofundar e diversificar os estudos da atuação profissional e um que visa enriquecer o currículo através de estudos integradores.

Também é apresentada a necessidade de um espaço físico que sirva para a criação do Laboratório de Ensino e Pesquisa em Matemática para que seja possível realizar a "manutenção de material existente, elaboração de produção científica e situações didáticas para cursos e oficinas, pesquisa sobre Matemática e Ensino de Matemática" (PPC UFOB, 2016, p. 87) já que, no momento em que o PPC foi produzido, não existia tal espaço. No documento é apresentada a estrutura que o espaço físico necessita para ser criado e quais os objetivos de criação do mesmo.

A Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), no campus de Amargosa, teve o seu curso de Licenciatura criado em 2006 e o PPC publicado em 2007. O documento apresenta que houve uma concepção para que o projeto fosse efetivado através da criação de 3 núcleos: Núcleo de Conhecimento Científico-cultural, Núcleos de Formação Prática e Núcleo de Formação Eletiva. Apesar das características particulares de cada núcleo, todos serão baseados considerando os seguintes pontos:

- Os pilares Ensino, Pesquisa e Extensão serão transversalizados ao longo da formação do Licenciando.
- Semana de Matemática, Bolsas de Permanência, Encontro de Matemática e orientações direcionadas que contemplam todos os pilares.
- Quanto à avaliação educacional destacamos a importância da maneira processual e interelacionada entre as componentes curriculares do curso.
- Entende-se por avaliação processual àquelas que constem: seminários, provas, testes, relatórios entre outros, sendo assim deve constar na avaliação individual do estudante uma avaliação escrita por componente curricular (PPC UFRB, 2007, p. 10).

Na cidade de Cruz das Almas está localizado um campus da UFRB que contém um curso de Licenciatura em Matemática na sua estrutura e, no PPC deste curso, estão apresentados os cinco Princípios da Política de Educação do Campo:

> O primeiro Princípio buscar recuperar aquilo que a educação urbanocêntria tentou destruir com sua perspectiva homogeneizadora e consumista: o Respeito à diversidade do campo em seus aspectos sociais, culturais, ambientais, políticos, econômicos, de gênero, geracional e de raça e etnia. (Ibid, 2010, I). O debate da Diversidade demarca a necessidade da Educação

> olhar para as diferenças territoriais e para as especificidades dos sujeitos do campo. O novo projeto de sociedade não pode ser ancorado apenas na lógica globalizante, precisa dialogar com os saberes tradicionais, com suas características sócio territoriais e regionais que resistiram historicamente e, com seus biomas, bases para o projeto da Agroecologia e de desenvolvimento agrário. Os estudantes precisam apreender o mundo a partir de suas localidades e suas localidades como parte das ações da sociedade mundial (UFRB, 2018, p. 13-14).

Além desses Princípios, há o objetivo geral de formar educadores do campo para contribuir com o desenvolvimento agrário e se adaptar à realidade das escolas do campo e sua região, possibilitando assim a criação de bases populares para a organização do trabalho pedagógico que beneficiem a região rural e seus habitantes.

A Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB) tem um PPC que abrange tanto o campus de Itabuna quanto os de Porto Seguro e Teixeira de Freitas e tem como principal objetivo a formação de educadores que investiguem, compreendam e desenvolvam "interfaces entre matemática e computação de modo crítico, reflexivo e criativo, fazendo de sua prática docente fonte continuada de pesquisa [...]" (PPC UFSB, 2016, p. 7) fonte essa que seria voltada ao desenvolvimento pessoal do cidadão e do profissional, focando também no desenvolvimento que seja desde o regional até o planetário.

A UFSB tem também o recurso das Licenciaturas Interdisciplinares (LIs), que ligam as práticas pedagógicas com a reflexão teórica utilizando dos componentes curriculares e estão sendo oferecidas por cinco grandes áreas: 1) Artes e suas Tecnologias; 2) Ciências da Natureza e suas Tecnologias; 3) Ciências Humanas e Sociais e suas Tecnologias; 4) Linguagens e suas Tecnologias e 5) Matemática e Computação e suas Tecnologias.

ANÁLISE GERAL DOS PPC: OS CURRÍCULOS PROPOSTOS E SUAS ARTICULAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR E PROFESSORA DE MATEMÁTICA

No âmbito geral, é possível perceber após a análise realizada que os PPC dessas universidades possuem pontos em comum e pontos em conflito, mas é quase unânime a visão de que o docente em matemática precisa ser flexível e criativo para lidar com os desafios que estarão presentes em seu caminho de ensino, reconhecendo as particularidades locais que definem cada território de identidade ao qual o curso está inserido. Além disso, a necessidade de inovar vem também do desejo que esses profissionais possuem em mudar a visão que os estudantes têm sobre a disciplina, assim fazendo com que a Matemática se torne algo mais agradável e interessante para os futuros alunos desses profissionais.

Nas universidades que apresentam mais de um campus com o curso de Licenciatura em Matemática, é possível encontrar diversas similaridades em suas estruturas, principalmente nos tópicos que falam sobre a história geral das instituições, como a sua história e legislações que a instituição segue.

As resoluções, legislações e pareceres mais citadas em seus PPC são: Parecer CNE/CES 1.302/2001 de 06.11.2001; Resolução CNE/CP nº 01 de 18.02.2002; Resolução CNE/CP nº 02 de 19.02.2002; Resolução CNE/CES nº 3 de 18.02.2003. A estrutura curricular dos cursos também são bastante similares, sempre focando nas áreas de Álgebra, Geometria e todas que possam se relacionar com os estudos da matemática. Outro ponto bastante citado e em que se encontram similaridades são os que dizem respeito às competências, habilidades e perfil que os futuros egressos dos cursos deverão apresentar após a formação e no momento de atuação profissional, o que nos permite inferir que há uma preocupação dos cursos, pelo menos prescrita e textualmente posta, quanto ao articular os diferentes conhecimentos necessários à docência para contribuir com o movimento de formação e constituição da identidade docente.

Os PPC também apresentam pontos similares quando informam sobre os currículos dos cursos, sempre apresentando uma intenção de estudos interdisciplinares e que se aprofundem nas questões teóricas, históricas e epistemológicas que tratem sobre a compreensão, execução e planejamento do ensino e aprendizagem em matemática.

Quanto aos cursos oferecidos pelos diferentes Institutos Federais, que evidenciamos anteriormente, tem um ponto em comum: terem sido orientados pela Resolução do CNE/CP nº 2/2015, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior. Esta resolução, portanto, propõe a construção de uma relação com a escola da Educação Básica durante os itinerários formativos do curso, não só nas práticas como componentes curriculares e estágio supervisionados, como nas diversas outras ações que intercruzam a formação inicial de professores.

Os PPC de 09 cursos das Universidades Estaduais (UNEB, UESB e UESC) foram orientados por outros dispositivos legais, diferente da Resolução nº 02/2015 ou a Resolução mais atual que é a de nº 02/2019, uma vez que quando da realização da pesquisa os currículos disponibilizados no site das instituições datavam do período de 2006 a 2012. Vamos apresentar, a seguir, alguns dos documentos que orientaram esses Projetos Pedagógicos de Curso:

1. Lei que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional (Lei nº 9.394/96);
2. Lei que dispõe sobre o estágio de estudantes (Lei nº 11.788/2008);
3. Resolução do CNE/CP nº 1/2002, que institui diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da Educação Básica;
4. Resolução do CNE/CP nº 2/2002, que institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura;
5. Resolução do CNE/CP nº 2/2015, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior;
6. Parecer CNE/CES nº 744/1997, que apresenta orientações para cumprimento do artigo 65 da Lei nº 9.394/96 – prática de ensino;

7. Parecer CNE/CP nº 9/2001 sobre as diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena;

8. Parecer CNE/CP nº 28/2001, que dá nova redação ao parecer nº21/2001, que estabelece duração e a carga horária dos cursos de formação de professores da Educação Básica;

9. Parecer CNE/CES nº 1.302/2001, que propõe as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura;

10. Parecer CNE/CP nº 15/2005 com esclarecimentos, para o Governo do Estado da Bahia, sobre as Resoluções CNE/CP nº 1/2002 e 2/2002;

Embora não se tratem dos documentos mais atuais, no que se referem às orientações para os cursos de licenciatura no país, percebemos que essas instituições respeitam o posto até aquele momento, quanto às práticas como componente curricular, os estágios e a relação importante que precisa ser criada entre a escola e a universidade, valorizando diversos conhecimentos que são necessários à docência e não evidenciado conhecimento em detrimento de outros. Nesse sentido, como evidenciado antes, percebemos que há uma preocupação com a formação profissional, de um profissional sensível para perceber e lidar com as diversas demandas apresentadas pela contemporaneidade.

Algo que é interessante pontuar, sobretudo, é a presença, como destacado por Silva e Oliveira (2020), de diversos componentes, ao longo desses cursos, que trabalham com a pesquisa e constrói relações com as vivências escolares, constituindo um perfil que os autores chamam de professor-pesquisador. Na verdade o que percebemos, partindo do que evidenciou Correia e Silva (2020), é um movimento pendular que percebe uma articulação indissociável entre a teoria e a prática, intercambiada entre os diversos componentes e considerando como importantes os diversos componentes que, pelo posto, se articulam para contribuir para a formação de professores e professoras de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi possível observar que os cursos de Licenciatura em Matemática pesquisados textualizam sobre os desafios enfrentados na contemporaneidade e, nesse contexto, como a sociedade se relaciona com a Matemática, estabelecendo como um dos principais desafios o de procurar formas de inovar e facilitar o seu ensino, para que as pessoas consigam estabelecer relações entre essa ciência e a vida cotidiana, reconhecendo a sua importância para a evolução da sociedade como um todo.

Estudar os PPC dos cursos nos fez “mergulhar” nos objetivos postos pelas instituições, sobretudo no lugar que à docência ocupa no que se refere aos aspectos particulares do constituir profissional e, sobretudo quanto ao ensino da Matemática. Olhar para esses elementos se mostra importante para desenvolver novos movimentos que acrescentem no processo de formação inicial de futuros docentes e na forma como esses

profissionais irão se relacionar com os seus futuros estudantes e com os desafios que serão apresentados desde o momento em suas rotinas de docência nos diversos campos que esse profissional poderá atuar.

Por fim, foi possível notar a preocupação que muitas das IES demonstram em articular os diferentes conhecimentos necessários à docência, pelo menos do ponto de vista de currículo prescritivo, por meio de diversos componentes, projetos e programas e espaços físicos, como o Laboratório de Educação Matemática, por exemplo, para contribuir com a formação. Em muitas das vezes, esse movimento formacional é posto articuladamente com a escola da Educação Básica e aparece como um lugar oportuno para evitar que a formação e os itinerantes de ensino se tornem obsoletos, o que corrobora para que os futuros profissionais contribuam com as aprendizagens Matemática e a ressignificação da forma como essa ciência seja percebida.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C. A **pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Anais da 27ª reunião anual da ANPED. Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.

BORGES, L. F. F. **Um currículo para a formação de professores.** In: VEIGA, I. P. A. SILVA, E. F. S. (orgs.). A escola mudou. Que mude a formação de professores. Campinas, SP: Papirus. 2010.

BRASIL. Resolução CNE/CP nº 1, de 1 de julho de 2015. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada**. Brasília, DF, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002. **Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, Curso de Licenciatura, de graduação plena.** Brasília, 2002a.

BRASIL. Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002. **Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior.** Brasília, DF, 2002.

BRASIL. Resolução CNE/CP nº 2, de 01 de julho de 2015. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada.** Brasília, DF, 2015.

BRASIL. Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação).** Brasília, DF, 2019.

CORREIA, V. C. P; SILVA, A. J. N. O Estágio e a Formação do Professor de Matemática. **REVISTA BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO BÁSICA**, v. 5, p. 1-8, 2020.

GARNICA, A. V. M**. História Oral e educação Matemática.** In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL, A. C. 2007. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas

LEI Nº 11.788 de 25 de dezembro de 2008. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11788.htm

LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf

LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm

MUNIZ, C. A. **Educação Lúdica Matemática, Educação Matemática Lúdica.** In: Américo Junior Nunes da Silva, Heurisgleides Sousa Teixeira (Orgs.). Ludicidade Formação de Professores e Educação Matemática em Dialogo. 1. Ed. Curitiba, Appris, 2016.

MENEZES, M. A. **Currículo, formação e inclusão: alguns implicadores**. In: FELDMANN, M. G. Formação de professores e escola na contemporaneidade. São Paulo: Editora Senac São Paulo, 2009. p. 201-220.

Moreira, Antonio Flavio Barbosa. **Formação de professores e currículo: questões em debate.** Ensaio: aval. pol. públ. Educ., Rio de Janeiro, v.29, n.110, p. 35-50, jan./mar. 2021

Parecer CNE/CES 009/2001 de 08 de maio 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf

Parecer CNE/CES 1.302/2001 de 06 de novembro 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf

Parecer CNE/CES 15/2005 de 02 de fevereiro 2005. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/pces0015_05.pdf

Parecer CNE/CES 28/2001 de 02 de outubro 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/028.pdf

Parecer CNE/CES 744/97 de 03 de dezembro 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/1997/pces744_97.pdf

PIMENTA. S. G. Formação de professores - saberes da docência e identidade do professor. R. Fac. Educ., São Paulo – SP, v.22, nº 2, p. 72-89, jul./dez. 1996.

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMATICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. SALVADOR / BAHIA- 2006- Atualização: Julho de 2008.

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE MATEMATICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. Barreiras. Barreiras, 2016.

PROJETO ACADÊMICO CURRICULAR CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO – PROGRAD DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA. COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA. ILHÉUS-BA, 2006

PROJETO DE RECONHECIMENTO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA CAMPUS II – ALAGOINHAS. Alagoinhas – BA, 2011.

PROJETO DE RECONHECIMENTO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA CAMPUS X – TEIXEIRA DE FREITAS. Teixeira de Freitas – BA, 2012

PROJETO DE RECONHECIMENTO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA. **CAMPUS VII – SENHOR DO BONFIM. SENHOR** DO BONFIM – BA, 2011

PROJETO DE RECONHECIMENTO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO – DEDC COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA **CAMPUS VIII – PAULO AFONSO**. Paulo Afonso – BA 2012.

PROJETO DE RECONHECIMENTO DO CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA. UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS COLEGIADO DE MATEMÁTICA **CAMPUS IX – BARREIRAS.** BARREIRAS – BA, 2011

PROJETO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA PARA FINS DE RECONHECIMENTO. UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS HUMANAS – **CAMPUS VI - CAETITÉ.** Reitor: LOURISVALDO VALENTIM DA SILVA. CAETITÉ, 2010.

PROJETO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA Bahia. **CAMPUS DE BARREIRAS.** BARREIRAS – Bahia, 2017

PROJETO PEDAGÓGICO DE CURSO LICENCIATURA INTERDISCIPLINAR EM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO E SUAS TECNOLOGIAS (Versão novembro/2016, em revisão). MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL DA Bahia Instituto de Humanidades, Artes e Ciências. **Itabuna / Porto Seguro / Teixeira de Freitas** – Bahia, Novembro 2016.

Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Educação do Campo nas Áreas de Conhecimento Ciências da Natureza ou Matemática. Ministério da Educação Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB. CRUZ DAS ALMAS – BA, NOVEMBRO – 2018

Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática Diurno. Ministério da Educação Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB Pró-Reitoria de Graduação – PROGRAD Coordenadoria de Ensino e Integração Acadêmica Núcleo Didático-Pedagógico. **Amargosa**. Centro de Formação de Professores Outubro 2007

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL DA BAHIA - IFBA **CÂMPUS SALVADOR.** Reitor: Renato da Anunciação Filho. Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática: Lurimar Smera Batista. Salvador – Bahia, 2015

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA **CAMPUS VALENÇA**. Reitor do IFBA: Renato da Anunciação Filho. Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática: Jamille Vilas Bôas de Souza. VALENÇA 2019

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. **Feira de Santana**, JUNHO DE 2018.

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA Bahia **CAMPUS DE EUNÁPOLIS.** Reitor: Renato da Anunciação Filho. Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática: Prof. Dr. Josaphat Ricardo Ribeiro Gouveia Júnior. Eunápolis, Maio de 2017

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO NOTURNO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. Universidade Federal da Bahia Instituto de Matemática Departamento de Matemática. **Salvador,** 15 de abril de 2008

PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA Bahia **CAMPUS CAMAÇARI**. Reitor:Renato da Anunciação Filho. Coordenador do Curso de Superior de Licenciatura em Matemática: Alexandre Boleira Lopo. Camaçari – Bahia, 2019.

Renovação de reconhecimento do curso de graduação em licenciatura em matemática com enfoque em informática. Universidade estadual do Sudoeste da Bahia. Colegiado do curso de licenciatura em matemática com enfoque em informática pró-reitoria de graduação gerencia acadêmica. Reitor: Prof. Dr. Paulo Roberto Pinto dos Santos. Coordenador do colegiado do curso de licenciatura em matemática com enfoque em informática: Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo. **Jequié – Bahia, 2011**.

RENOVAÇÃO DE RECONHECIMENTO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA UESB, CAMPUS DE VITORIS DA CONQUISTA - BA universidade estadual do sudoeste da Bahia colegiado do curso de matemática. Reitor: Prof. Dr. Abel Rebouças São José. Coordenador do colegiado de matemática. Prof. MSc. Flaulles Boone Bergamaschi. Vitória da Conquista, 25 de fevereiro de 2010.

SACRISTÁN, J. G. **O Currículo: uma reflexão sobre a prática**. Tradução Ernani F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SILVA, Américo Junior Nunes da. **FORMAÇÃO LÚDICA DO FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA POR MEIO DO LABORATÓRIO DE ENSINO/** Américo Junior Nunes da Silva – 2014 196 p. Dissertação (mestrado), UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, FACULDADE DE EDUCAÇÃO, PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, 2014. CDU 371.13

SILVA, Lidiane Rodrigues Campêlo da; DAMACENO, Ana Daniella; MARTINS, Maria da Conceição Rodrigues; SOBRAL, Karine Martins; FARIAS, Isabel Maria Sabino de; **PESQUISA DOCUMENTAL: ALTERNATIVA INVESTIGATIVA NA FORMAÇÃO DOCENTE. SILVA**. IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. 26 a 29 de Outubro de 2009 – PUCPR.

SILVA, A. J. N. **OS LABORATÓRIOS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ENQUANTO ESPAÇOS DE FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO LÚDICO E PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO**. Anais do VIII Encontro Brasileense de Educação Matemática. ISSN 2359-4608. Brasília 17 a 22 de agosto 2020

SILVA, Américo Junior Nunes da; Souza, Ilvanete dos Santos de; Cruz, Idelma Souza da. **O ensino de Matemática nos Anos Finais e a ludicidade: o que pensam professora e alunos?** Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), Brasil v. 4, e202018, p. 1-19, 2020.

SILVA, A. J. N.; OLIVEIRA, C. M. A PESQUISA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. **REVISTA INTERNACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES (RIPF)**, v. 5, p. 1/ e020015-23, 2020.

SILVA, A. J. N.; PASSOS, C. L. B. Formação do professor que ensina matemática, ludicidade e narrativas: o que se pesquisou no Brasil. **REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO (SÃO CARLOS)**, v. 14, p. 01, 2020.

SILVA, Americo Junior nunes da. **Querido diário: o que revela as narrativas sobre ludicidade, formação e futura pratica do professor que ensina(rá) matemática nos anos iniciais.** Tese (doutorado) Universidade Federal de São Carlos. campus São Carlos, 2018.

SILVA, Lidiane Rodrigues Campêlo da; DAMACENO, Ana Daniella; MARTINS, Maria da Conceição Rodrigues; SOBRAL, Karine Martins; FARIAS, Isabel Maria Sabino de; **PESQUISA DOCUMENTAL: ALTERNATIVA INVESTIGATIVA NA FORMAÇÃO DOCENTE. SILVA**. IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. 26 a 29 de Outubro de 2009 – PUCPR.

SILVA, Mariane Carloto da; CEZAR, Amanda do Prado Ferreira. **APRENDIZAGEM E O CURRÍCULO NO ENSINO SUPERIOR: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ADAPTAÇÃO CURRICULAR**. XII Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. 26 a 29 de Outubro de 2009 – PUCPR. V Seminário internacional sobre profissionalização docente – SIPD- cátedra UNESCO. 26 a 29 de Outubro de 2015 – PUCPR.

Suzart, Leonardo Araújo; Silva, Américo Junior Nunes da. **LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA NA BAHIA E OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS: COMO ACONTECE ESSA ARTICULAÇÃO AO LONGO DA FORMAÇÃO?** DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.4192130083. Iniciação científica: educação, inovação e desenvolvimento humano / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Carla Linardi Mendes de Souza. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021. ISBN 978-65-5983-441-9 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.419213008

SOUZA, José Clécio Silva e. Educação e História da Educação no Brasil. **Educação Pública.** 27 nov. 2018. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/18/23/educao-e-histria-da-educao-no-brasil>. Acesso em: 07 jun. 2021.

CAPÍTULO 11

R/EXAMS COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO REMOTO: UM ENFOQUE NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÔNICAS

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 10/01/2022

Luzia Pedroso de Oliveira
Universidade Federal de São Paulo
São José dos Campos
http://lattes.cnpq.br/3975643092767039

Denise Helena Lombardo Ferreira
Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Campinas
http://lattes.cnpq.br/5309189687577128

RESUMO: O ensino remoto emergencial, ocasionado pela pandemia do SARS-COV-2, impulsionou o repensar das práticas pedagógicas apoiadas nas tecnologias digitais. Uma etapa importante para o aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem é a escolha de tecnologias que possibilitem aumentar o engajamento do estudante, favorecer a autorregulação de sua aprendizagem e facilitar o acompanhamento continuado do desempenho dos estudantes. Neste sentido, este trabalho visa apresentar alguns exemplos de atividades individuais com *feedback* automático e múltiplas tentativas pelo *Moodle*, gerados com o pacote "*exams*" do *software R*. As atividades destacadas sobre os conteúdos de cônicas foram propostas em uma turma de reoferecimento de Geometria Analítica durante o ensino remoto emergencial em uma Universidade Federal do Estado de São Paulo.
PALAVRAS-CHAVE: *Feedback* automático, múltiplas tentativas, novas tecnologias.

R/EXAMS AS A TOOL TO SUPPORT REMOTE TEACHING: A FOCUS ON TEACHING AND LEARNING CONICS

ABSTRACT: Emergency remote teaching, caused by the SARS-COV-2 pandemic, has driven the rethinking of pedagogical practices supported by digital technologies. An important step in improving the teaching and learning process is the choice of technologies that make it possible to increase student engagement, favor self-regulation of their learning and facilitate the continued monitoring of student performance. In this sense, this work aims to present some examples of individual activities with automatic feedback and multiple attempts by Moodle, generated with the "exams" package of the R software. The highlighted activities on the conics contents were proposed in an Analytical Geometry reoffering class during emergency remote teaching at a Federal University of the State of São Paulo.
KEYWORDS: Automatic feedback, multiple attempts, new technologies.

1 I INTRODUÇÃO

Na Educação Matemática são frequentes as pesquisas explorando os recursos didáticos do *GeoGebra*. O *GeoGebra* é um *software* livre de matemática dinâmica que tem auxiliado professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos, especialmente de geometria e álgebra. O *software* apresenta uma

interface bastante amigável e também possibilita a criação de aplicativos web interativos que ficam disponíveis para a comunidade. O acesso aos materiais didáticos pode ser feito pelo link https://www.geogebra.org/materials.

Além do *GeoGebra* vários *softwares* livres e aplicativos online vêm sendo utilizados para dar suporte à aprendizagem de conteúdos de matemática, entre eles *Winplot*, *WolframAlpha*, *Symbolab* e *Scilab*. Já o *Matlab* destaca-se entre os *softwares* comercializados.

O *R* é um *software* amplamente utilizado na análise de dados, mas ainda pouco explorado no ensino e aprendizagem de Matemática. Por ser um *software* livre e de código aberto com uma vasta comunidade de usuários e desenvolvedores nacionais e internacionais este *software* tem se expandido muito rapidamente. O *R* é constituído por pacotes (bibliotecas) que são instalados e carregados de acordo com a necessidade. Além da imensa quantidade de pacotes também estão disponíveis materiais didáticos com vários exemplos, o que torna rápida a implementação dos conteúdos de interesse. A partir de pequenas modificações em códigos prontos disponíveis é possível, por exemplo, obter diversos tipos de gráficos, dos mais simples aos mais sofisticados (https://www.r-graph-gallery.com/), criar mapas, ajustar modelos estatísticos, criar aplicativos web interativos e sites (https://rmarkdown.rstudio.com/). Uma plataforma integrada ao *R*, o *RStudio*, oferece vários recursos que facilitam a importação, a edição dos comandos e a visualização dos resultados obtidos.

O *R* possui vários pacotes relacionados à geometria e álgebra, entre eles o "*matlib*" e o "*geometry*" (R CORE TEAM, 2021), com várias funções do *Matlab* disponíveis.

O pacote "*exams*" do *R* possui funções implementadas que permitem a criação de vários tipos de questões incluindo múltipla escolha, resposta numérica, entre outras.

Neste trabalho são apresentados alguns exemplos de atividades individuais com *feedback* automático geradas com o pacote "*exams*" do *R*. As atividades são relacionadas ao estudo das cônicas e foram propostas durante o ensino remoto emergencial para uma turma de reoferecimento de Geometria Analítica em uma Universidade Federal do Estado de São Paulo.

Diversas pesquisas discutem propostas sequenciais didáticas sobre o estudo de cônicas com o apoio do *GeoGebra* para o ensino médio (GONÇALVES, 2015; RODRIGUES, 2015; CALVOSO, 2014; NUNES, 2014). Tais pesquisas vão ao encontro dos requisitos no currículo do Estado de São Paulo (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, 2011). No currículo de 2011, o tópico "cônicas: noções, equações e aplicações" faz parte do conteúdo programático de Matemática para o 1º semestre da 3ª série do ensino médio, sendo requeridas as habilidades "saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas" (p. 69). O processo de revisão, elaboração e implementação dos currículos são alinhados à BNCC (Base Nacional Comum Curricular) sendo de responsabilidade da Secretaria de Educação

do Estado de São Paulo (SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, 2020). Na última versão do currículo, homologada em 2020, o tópico de cônicas e as habilidades relacionadas não estão sendo citados.

No ensino superior o estudo das cônicas faz parte do conteúdo programático da unidade curricular (uc) de Geometria Analítica, sendo abordadas nos sistemas de coordenadas cartesianas e polares. O conteúdo de cônicas é pré-requisito para estudo das quádricas nesta uc e em outras subsequentes como cálculo em várias variáveis. Adicionalmente, o aprendizado desses conteúdos também é importante para o entendimento de várias aplicações práticas. Calvoso (2014) apresenta algumas aplicações de cônicas e quádricas em diversas áreas.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Michael Moore, um dos precursores da educação a distância nos Estados Unidos, contribuiu para a sua consolidação, sendo uma referência nessa área (VERMELHO, 2014). Moore e Kearsley (2012, p. 2) definem educação a distância como sendo

> "Ensino e aprendizagem planejada em que o ensino ocorre regularmente em um local diferente do aprendizado, exigindo comunicação por meio de tecnologias e uma organização institucional especial".

O ensino remoto emergencial, assim como o ensino a distância utilizam as tecnologias digitais para a comunicação, entretanto, como o próprio nome sugere, o ensino remoto emergencial é uma medida de emergência como forma de possibilitar a continuidade do ensino presencial durante a necessidade de distanciamento social frente a pandemia decorrente do SARS-COV-2. Os estudantes do ensino remoto emergencial são aqueles que optaram pela modalidade presencial e pelas circunstâncias foram obrigados a dar continuidade de forma remota. Ao passo que o ensino a distância é uma modalidade de ensino minuciosamente planejada visando proporcionar experiências de aprendizagem significativa a alunos que devido a responsabilidades pessoais ou profissionais não teriam a opção de realizar um curso presencial (BAWA, 2020).

Gonçalves (2016) destaca que as tecnologias de informação e comunicação possibilitam a interação, a construção do conhecimento, a colaboração e a atividade social de formas inconcebíveis.

Os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) fornecem uma grande quantidade de ferramentas para criar e estruturar cursos a distância. Esses ambientes são também utilizados como apoio para o ensino presencial, auxiliando na organização e publicação dos conteúdos e na elaboração e gerenciamento das atividades. Dentre esses ambientes virtuais o *Moodle* (*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*) é o preferido em vários países. De acordo com as estatísticas divulgadas pela companhia, o *Moodle* é utilizado em 242 países, sendo cerca de 294 milhões de usuários (https://stats.moodle.org/).

O ensino remoto emergencial requer uma revisão das práticas pedagógicas para atender as necessidades impostas pela distância. Neste sentido, o *feedback* é uma etapa fundamental e deve tanto quanto possível estar alinhado para a individualidade do estudante e favorecer a sua autoavaliação e autorregulação da aprendizagem (DĀBOLIŅŠ; GRUNDSPEŅĶIS, 2013).

3 I METODOLOGIA

Na presente universidade o acesso ao *Moodle* é liberado em caso de interesse do professor para as unidades curriculares separadamente. A equipe de Tecnologia de Informação é responsável pelo cadastro dos estudantes.

O *Moodle* fornece muitas possibilidades para o professor criar as suas atividades didáticas interativas e com *feedback*, vários tipos de relatórios que auxiliam o acompanhamento continuado do desempenho dos estudantes e também disponibiliza recursos que favorecem a interação entre os estudantes e a elaboração de trabalhos de forma colaborativa.

A atividade questionário do *Moodle* permite criar e configurar questionários contendo questões de vários tipos incluindo múltipla escolha, verdadeiro/falso, associação, resposta curta, entre outras. O professor pode permitir que o questionário tenha múltiplas tentativas, com questões embaralhadas ou selecionadas aleatoriamente de uma categoria do banco de questões e pode definir o momento para que as sugestões, comentários e respostas corretas sejam disponibilizados aos estudantes. Cada tentativa é corrigida automaticamente, com exceção das questões dissertativas e as notas podem ser exportadas para uma planilha.

A etapa de elaboração das atividades de questionário no *Moodle* é simplificada com o uso do pacote "*exams*" do *R*. Este pacote permite gerar um arquivo com uma grande quantidade de questões similares a ser importado no *Moodle*. O autor do pacote e colaboradores, Zeileis et al. (2020) disponibilizaram no site http://www.r-exams.org/ alguns tutoriais para instalação e utilização deste pacote e também vários *templates* editáveis com exemplos de questões de múltipla escolha com uma ou várias alternativas corretas, questões com respostas numéricas, entre outras.

Uma das vantagens da atividade de questionário no *Moodle* é o *feedback* automático que favorece a autorregulação da aprendizagem pelo estudante. Dāboliņš e Grundspeņķis (2013) discutem alguns benefícios do *feedback* e apontam para aspectos importantes a serem alcançados pelo estudante, como compreender os objetivos de aprendizagem, reconhecer o seu nível de entendimento e aprender a melhorar o seu conhecimento. As atividades de questionário também oferecem oportunidade para os alunos demonstrarem sua compreensão sobre os materiais fornecidos servindo de *feedback* para o professor e possibilitando melhorias como apontam Guangul et al. (2020).

4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

De acordo com o plano de ensino da unidade curricular foram reservadas três semanas para abordar os conteúdos de cônicas.

Os recursos do *Moodle* possibilitaram criar uma interface amigável para disponibilizar os conteúdos e as atividades. Foi possível criar uma aba para cada semana facilitando o acesso e sempre que possível foram utilizados *hiperlinks* para direcionar rapidamente os estudantes aos conteúdos de interesse.

Buscou-se apresentar de forma bastante detalhada os objetivos de aprendizagem visando auxiliar os estudantes em seu processo autônomo de aprendizagem. Como ilustração, são apresentados, a seguir, os objetivos de aprendizagem referentes a primeira semana de estudo das cônicas: 1) compreender o que são cônicas ou seções cônicas; 2) compreender como se obtém as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) a partir da intersecção de um plano com uma superfície cônica; 3) para cada uma das cônicas: a) compreender a definição, b) saber quais são os seus elementos (focos, vértices, etc.), c) compreender como se obtém a equação reduzida partindo da definição, d) saber encontrar a equação reduzida a partir de seus elementos e vice-versa, e) saber esboçar o gráfico e f) compreender o significado de excentricidade. Os conteúdos na segunda e terceira semanas foram, respectivamente, “classificação, rotação e translação de cônicas” e “cônicas em coordenadas polares”. As duas primeiras semanas ocorreram sucessivamente, entretanto, houve uma semana anterior à terceira, destinada aos conteúdos de coordenadas polares, esféricas e cilíndricas.

As atividades de questionário favoreceram a abordagem de alguns dos objetivos de aprendizagem. Por exemplo, na atividade apresentada na Figura 1 trabalhou-se os objetivos 3d), 3e) e 3f) no caso das parábolas. O *GeoGebra* também foi utilizado principalmente nos encontros síncronos e em algumas atividades propostas. As Figuras 2 e 3 apresentam, respectivamente, exemplos abordando os objetivos das semanas 2 e 3. Para elaborar a atividade da semana 3 explorou-se os recursos gráficos do *R*.

Nos itens a seguir obtenha a equação reduzida e esboce o gráfico. OBS: No caso de frações utilize decimais. Neste caso estou considerando 4 casas decimais. O erro tolerado é 0,01.

a. A parábola tem vértice $V(0,0)$ e foco $F(-5,0)$.

$y^2 =$ -20 ✓ x

b. A parábola tem vértice $V(0,0)$ e foco $F(0,1)$.

$x^2 =$ 4 ✓ y

c. A parábola tem vértice $V(0,0)$ e reta diretriz $y = 3$.

$x^2 =$ -12 ✓ y

d. A parábola tem vértice $V(0,0)$ e reta diretriz $x = 3$.

$y^2 =$ -12 ✓ x

e. A equação geral é $-1x^2 + (1)y = 0$

$x^2 =$ -1 ✗ y

Incorreto
A resposta correta é: 1.
Atingiu 0,00 de 1,00

geral é $-4y^2 + (4)x = 0$

OBS: Observe pelos gráficos (que não estão na mesma escala) que todas as parábolas tem a mesma forma, mudando apenas o seu tamanho. Isto porque a excentricidade da parábola é igual a 1. Assim como as circunferências, os quadrados e os triângulos equiláteros a parábola tem sempre a mesma forma, mudando apenas o seu tamanho.

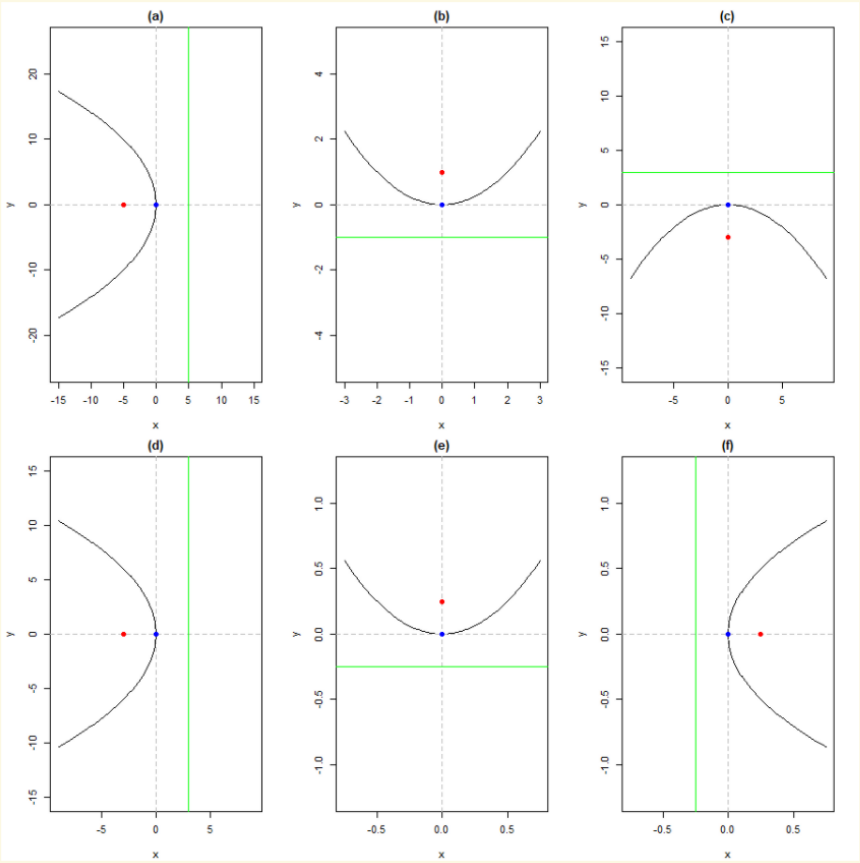


Figura 1 – Exemplo de atividade sobre os elementos das cônicas (parábola).

Complete as informações a seguir e esboce o gráfico. OBS: No caso de frações utilize decimais. Estou considerando 4 casas decimais. O erro tolerado é 0,01.

Considere a função polinomial $g(x,y) = 4x^2 + 16y^2 + (-48)x + (-32)y + 96$. O lugar geométrico dos pontos $X(x,y)$ que satisfazem a equação $g(x,y) = 0$ é uma elipse.

Obtenha a matriz simétrica M da função $g(x,y)$.

$M =$ [ ] [ ] [ ]
[ ] [ ] [ ]
[ ] [ ] [ ]

A equação reduzida da elipse é $(x-h)^2/$ [ ] $+(y-k)^2/$ [ ] $= 1$, sendo $h =$ [ ] e $k =$ [ ].

O comprimento do eixo maior é igual a [ ].

O comprimento do eixo menor é igual a [ ].

A distância focal é igual a [ ].

Considere A1 e A2 os vértices do eixo maior da elipse sendo A1 o vértice de menor valor de abscissa (ou ordenada) comparado a A2. As coordenadas dos vértices são A1([ ] , [ ]) e A2([ ] , [ ]).

Considere B1 e B2 os vértices do eixo menor da elipse sendo B1 o vértice de menor valor de abscissa (ou ordenada) comparado a B2. As coordenadas dos vértices são B1([ ] , [ ]) e B2([ ] , [ ]).

Considere F1 e F2 os focos da elipse sendo F1 o foco de menor valor de abscissa (ou ordenada) comparado a F2. As coordenadas dos focos são F1([ ] , [ ]) e F2([ ] , [ ]).

A excentricidade da elipse é [ ].

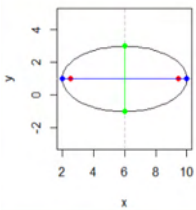


Figura 2 – Exemplo de atividade sobre translação de cônicas.

A equação polar da parábola apresentada na figura pode ser escrita como $r = \frac{14}{2+2cos\theta}$. Responda os itens a seguir.

OBS: No caso de frações utilize decimais. Neste caso estou considerando 4 casas decimais. O erro tolerado é 0,01.

a. Qual é o valor da excentricidade?

b. Qual é a equação da reta diretriz (em coordenadas cartesianas)?

$x=$

c. Quais são as coordenadas do vértice da parábola em coordenadas polares: (,)

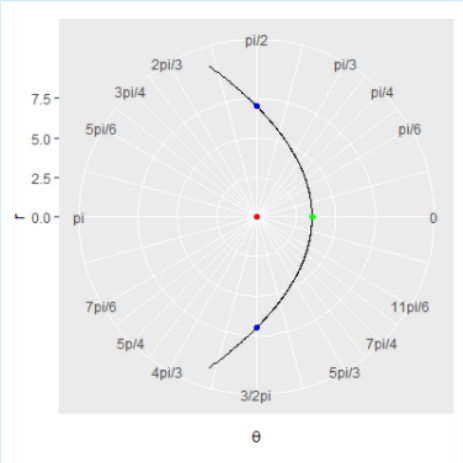


Figura 3 – Exemplo de atividade de cônicas em coordenadas polares (parábola).

Por meio do relatório de notas do *Moodle* foi possível acompanhar não somente as notas individuais em cada atividade, mas também o número de tentativas global da turma em cada uma delas, o que possibilitou ter uma ideia dos conteúdos com maior ou menor dificuldade encontrada pelos alunos.

Não foram fixados tempo de duração e número limite de tentativas, uma vez que a cada nova tentativa outros valores eram considerados. Dessa forma, os alunos podiam refazer as atividades depois de identificar seus acertos e erros.

Guangul et al. (2020) destacam que as atividades de questionários individualizadas foram importantes como método de avaliação para evitar “colas” durante a pandemia.

O acesso às bibliotecas eletrônicas foi fundamental durante o ensino remoto emergencial pela diversidade de e-books disponíveis. A indicação pela professora de algumas referências com indicativos das páginas, seções ou capítulos, assim como uma descrição detalhada das competências e habilidades a serem adquiridas foram fatores facilitadores para o aprendizado dos estudantes. Outros meios também foram utilizados, como a disponibilidade das gravações dos encontros síncronos e das videoaulas sugeridas. Visando aumentar a autonomia do aluno na busca dos conteúdos foram propostas algumas atividades de pesquisa.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades individualizadas com *feedback* automático pelo *Moodle*, geradas com o pacote "*exams*" do *R*, possibilitaram contemplar vários aspectos no processo de ensino e aprendizagem, entre eles: uma abordagem direcionada aos objetivos de aprendizagem, uma avaliação formativa, autonomia e engajamento do estudante e autorregulação de sua aprendizagem.

Em trabalhos futuros pretende-se complementar a discussão com relação a metodologia utilizada com base na opinião dos estudantes. Também é objetivo da primeira autora criar uma página web a partir do *software R*, possibilitando compartilhar os arquivos para importação no *Moodle* dos exercícios apresentados neste trabalho e a troca de experiências com outros colegas.

REFERÊNCIAS

BAWA, P. Learning in the age of SARS-COV-2: A quantitative study of learners' performance in the age of emergency remote teaching. **Computers and Education Open**, v. 1, 100016, 2020. https://doi.org/10.1016/j.caeo.2020.100016.

CALVOSO, J. C. **Estudo das cônicas com as aplica**ções e o software **GeoGebra como ferramentas de apoio didático**. Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Departamento de Ciências Exatas, Campus de Três Lagoas, 122 f., 2104.

DĀBOLIŅŠ, J.; GRUNDSPEŅĶIS, J. The Role of Feedback in Intelligent Tutoring System. **Applied Computer Systems**, v. 14, p. 88-93, 2013. doi: 10.2478/acss-2013-0011.

GONÇALVES, A. J. C. **Uma proposta de ensino de cônicas com o auxílio do GeoGebra.** Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 82f, 2015.

GONÇALVES, A. V. **Modelagem automática e dinâmica de estilos de aprendizagem em sistemas adaptativos e inteligentes para educação a distância**: estudo comparativo entre duas abordagens. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Diamantina-MG, 126 f., 2016.

GUANGUL, F. M.; SUHAIL, A. H.; KHALIT, M.;KHIDHIR, B. A. Challenges of remote assessment in higher education in the context of COVID-19: a case study of Middle East College. **Educational Assessment, Evaluation and Accountability**, v. 32, p. 519–535, 2020. https://doi.org/10.1007/s11092-020-09340-w.

MOORE, M. G.; KEARSLEY, G. **Distance education:** A systems view of online learning (3rd ed.). Belmont, CA: Wadsworth Cengage Learning. 363p., 2012.

NUNES, J. A. C. **Seccões** Cônicas: uma proposta de ensino utilizando o software GeoGebra. Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas, Feira de Santana, 85 f., 2014.

R CORE TEAM. R: **A language and environment for statistical computing.** R Foundation for Statistical Computing. Austria, 2021. Disponível em: https://www.R-project.org/. Acesso em: 18 set. 2021.

RODRIGUES, G. F. **As curvas cônicas com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Instituto de Matemática, Maceió, Universidade Federal de Alagoas, 64 f., 2015.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. Atual, São Paulo: SE, 72 p., 2011.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo Paulista Etapa Ensino Médio**, 300 p., 2020.

VERMELHO, S. C. Educação a distância: sistemas de aprendizagem on-line. **Educar em Revista**, Edição Especial n. 4, p. 263-268. Editora UFPR, 2014. 10.1590/0104-4060.38941

ZEILEIS, A.; GRUEN, B.; LEISCH, F.; UMLAUF, N.; BIRBAUMER, M.; ERNST, D.; KELLER, P.; SMITS, N. STAUFFER, R.; SATO, K. **Exams:** Automatic Generation of Exams in R. Version: 2.3-6, 2020. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/exams/index.html>. Acesso em: 13 jun. 2021.

CAPÍTULO 12

FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU E SUAS APLICAÇÕES EM GRÁFICOS CARTESIANOS

Data de aceite: 01/03/2022

Caroline Saemi Lima Fujimoto
Pontifícia Universidade Católica do Paraná - Câmpus Curitiba - Curso Matemática
Curitiba

RESUMO: O Objeto Educacional Digital – OED *PhET (Physics Education Technology*) apresentado a seguir tem como finalidade auxiliar os discentes a respeito de funções polinomiais de 2º grau e sua aplicação em gráficos cartesianos. Essa OED possui o intuito de facilitar a compreensão da realização dos gráficos cartesianos e a abstração da dificuldade implementada na sociedade em relação à Matemática e suas Tecnologias. Uma das características desse material é possibilitar a visualização das funções polinomiais de 2º grau nos gráficos cartesianos de forma descontraída e simples através das ferramentas disponíveis no site do link: (https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/graphing-quadratics/about). No website estão à disposição dados sobre o material, objetivos de aprendizagens, recursos inclusos e sistemas requeridos. A sequência didática demonstrada ao longo do texto busca como objetivo melhorar a educação nos sentidos de compreensão do material didático, acessibilidade aos meios tecnológicos digitais e senso crítico do seu processo de conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: Eixo das Abscissas, Funções polinomiais de 2º grau, Matemática, Plano cartesiano, Variáveis, Vértices da função.

ABSTRACT: The Digital Educational Object – OED PhET (Physics Education Technology) presented below is intended to help students with high-school polynomial functions and their application in Cartesian graphics. This OED is intended to facilitate the understanding of the realization of Cartesian graphics and the abstraction of the difficulty implemented in society in relation to Mathematics and its Technologies. One of the characteristics of this material is that it allows the visualization of 2nd degree polynomial functions in Cartesian graphs in a relaxed and simple way through the tools available on the link's website: (https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/graphing-quadratics /about). On the website, data about the material, learning objectives, included resources and required systems are available. The didactic sequence demonstrated throughout the text seeks to improve education in terms of understanding the didactic material, accessibility to digital technological means and a critical sense of its knowledge process.

KEYWORDS: Abscissa axis, Cartesian plane, Function vertices, Mathematics, Variables, 2nd degree polynomial functions.

INTRODUÇÃO

Mapeamento

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

Componente Curricular: Matemática.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Duração da atividade: 2 aulas de 50 minutos com intervalo de 3 dias.

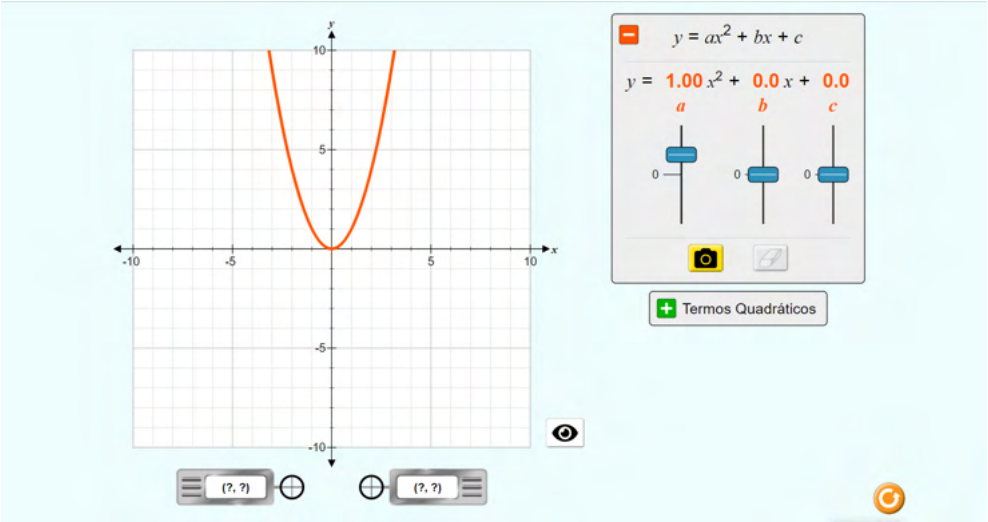
Competências específicas do componente curricular: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Habilidades do componente curricular na BNCC: (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

Objetos de conhecimentos: Observação da aplicação das funções polinomiais de 2º grau no plano cartesiano, bem como os vértices da parábola, valor máximo ou valor mínimo e plausível intersecção do eixo das abscissas.

DESCRIÇÃO DO OBJETO

O site da *PhET* da *University of Colorado* foi criado com o propósito de facilitar o ensino de Matemática, Física e Química a partir de simulações de exercícios. O aplicativo está disponível em diversos idiomas e possui atividades e dicas de como utilizar a OED. A plataforma do site é gratuita e pode ser acessada em sistemas operacionais Windows, Linux e iMac a partir do link: (https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/graphing-quadratics/about). O aplicativo também pode ser acessado via celular, no entanto, deve ser pago um valor em reais ou dólares, dependendo do sistema operacional do celular, para sua utilização. Para obter o aplicativo para celulares Androids basta acessar o link: (https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.colorado.phet.androidApp&hl=pt_BR&gl=US) e para obter em celulares iPhone basta acessar o link: (https://apps.apple.com/br/app/phet-simulations/id1134126831). Sua indicação de utilização é em computadores das instituições escolares com o objetivo de guiar os alunos no aprendizado para que o conhecimento seja fixado na memória operacional e possam realizar com mais facilidade as funções polinomiais de 2º grau em gráficos cartesianos. No site é possível observar como as variações dos valores de a, b e c podem influir diretamente no gráfico, assim como os vértices da parábola, valor máximo ou valor mínimo, e possível intersecção do eixo das abscissas de forma simplificada a partir de um medidor das variáveis de a, b e c ao lado do plano cartesiano, como mostrado na imagem abaixo.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL

- **Função Polinomial de 2º grau:**

Primeiramente, para a aplicação da OED devemos considerar que os alunos já aprenderam a fundamentação das funções e suas propriedades.

Definição:

A função polinomial de 2º grau é definida por f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que x ϵ $\mathbb{R}$ e a ≠0 para:

$$f(x) = ax^2 + bc + c$$

Temos que f: $X \rightarrow Y$, em que o conjunto domínio de X e o conjunto contradomínio de Y sejam correspondentes. Então a imagem será representada por I = [X,Y].

Exemplos:

$f(x) = \sqrt{5}x^2 + 2x + 3$, com $a = \sqrt{5}$, b = 2 e c = 3

$f(x) = {}^{2}/_{3}x^2 + 5x + 7$, com $a = {}^{-2}/_{3}$, b = 5 e c = 7

$f(x) = 2x^2 + 4x + 1$, com a = 2, b = 4 e c = 1

Todos os exemplos acima pertencem à função polinomial de 2º grau, por não apresentar a = 0.

ATENÇÃO:

Caso a = 0, então teremos uma função polinomial de 1º grau:

f(x) = 2x – 9, com a = 0, b = 2 e c = -9

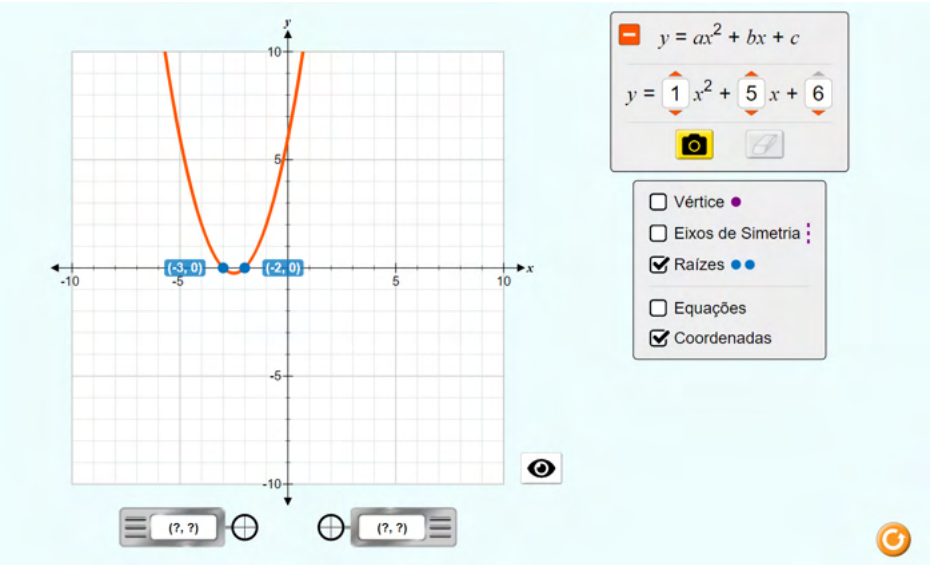
Essa situação não se enquadra no que buscamos estudar, então deve ser desconsiderada.

- **Gráfico da Função Polinomial de 2º grau:**

Podemos observar diversos gráficos da função polinomial de 2º grau de acordo com os valores das variáveis a, b e c. Além disso, os vértices da parábola também sofrem alteração e possuem valores diferentes.

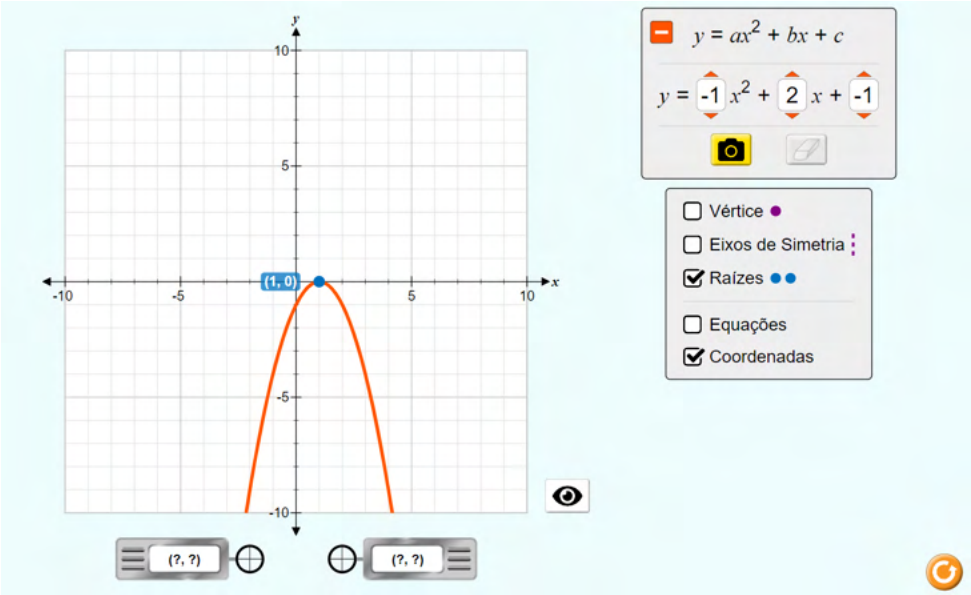
Zero das funções:

- Função polinomial de 2º grau em que a parábola toca no eixo das abscissas pelos distintos valores de x, ou seja, x' ≠ x''.



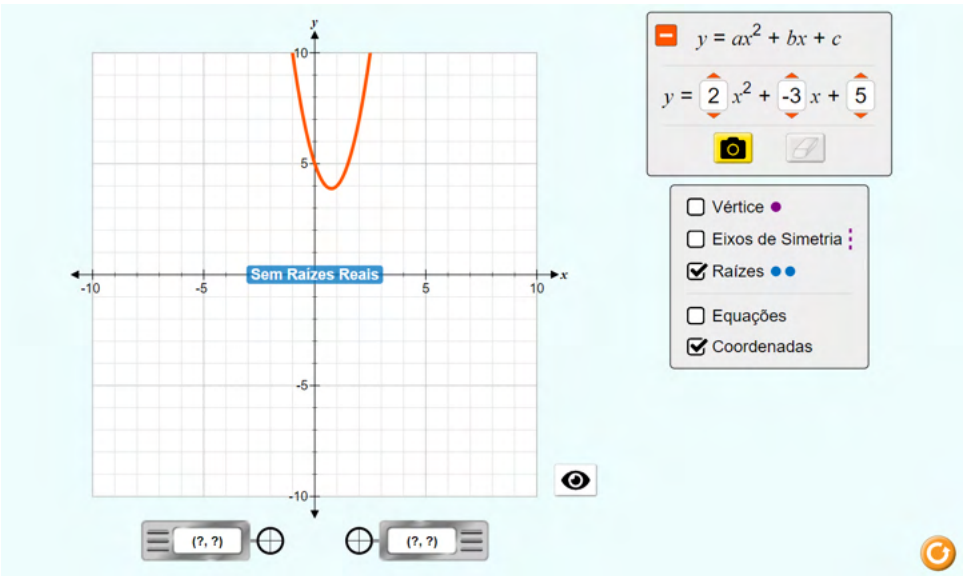
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

- Função polinomial de 2º grau em que os valores de x são idênticos e o gráfico toca num único ponto do eixo da ordenada.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

- Função polinomial de 2º grau em que os valores de x ∉ ℝ e não toca o eixo das abscissas.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

Estudo do sinal:

Para o estudo do sinal da função polinomial do 2º grau devemos relembrar Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em que o vértice de x e y é equivalente da fórmula de Bháskara:

$Vx = -b/_{2a}$

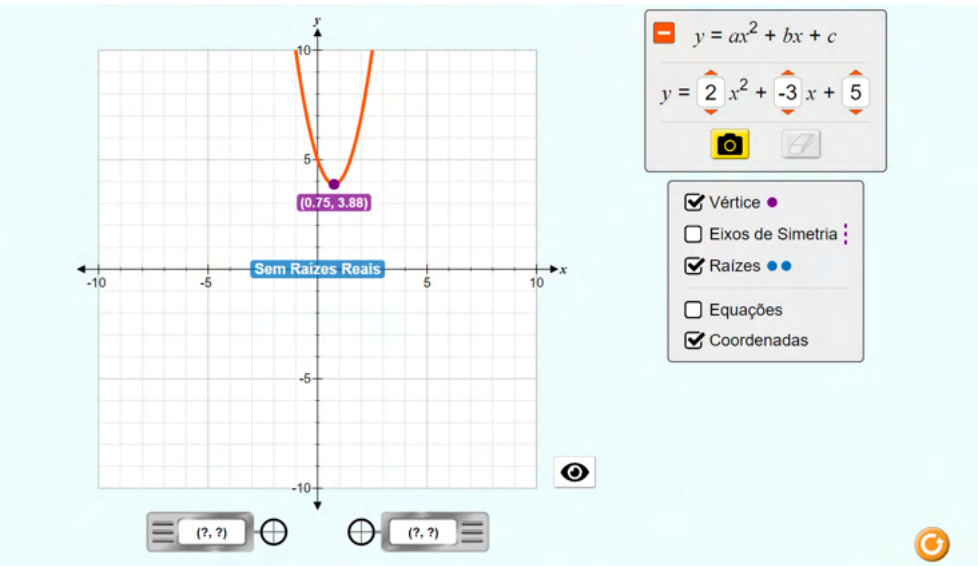
$Vy = 4ac\text{-}b^2/_{4a}$ ou $Vy = \Delta/_{4a}$

ATENÇÃO:

O cálculo para compreensão do vértice é chamado de forma canônica. Caso queira conhecer mais sobre o assunto acesse esse link: (https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/18654/1/JobsonHSS_DISSERT.pdf).

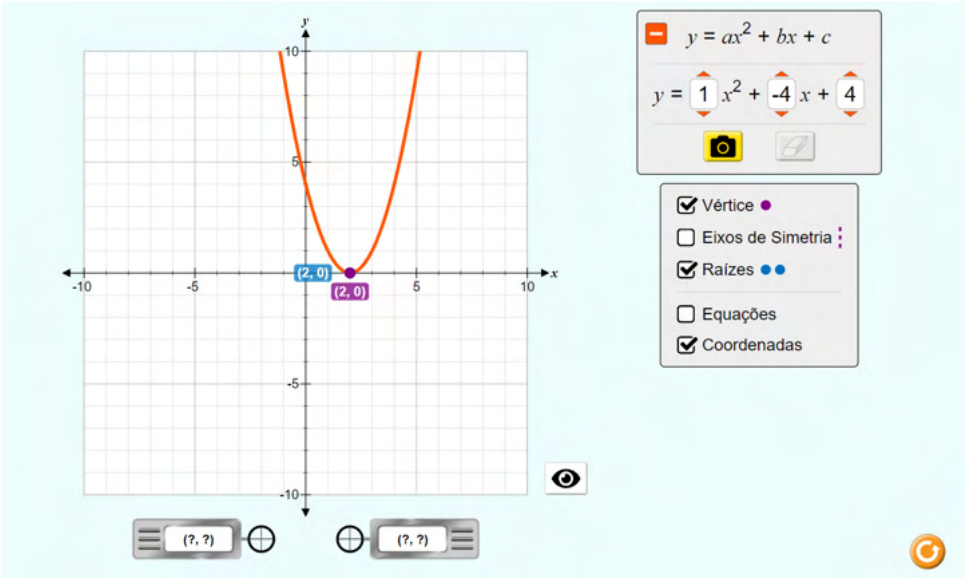
O valor máximo e valor mínimo da função polinomial de 2º grau é observado a partir da posição da concavidade da parábola. Quando a > 0 teremos um valor máximo com uma concavidade virada para cima e quando a < 0 teremos um valor mínimo com uma concavidade virada para baixo. Podemos observar que nos gráficos 1, 2 e 3 os valores acompanhados de x^2 são maiores que 0, mas são 3 gráficos diferentes entre si pelo conceito de zero das funções já descrito.

- Gráfico 1 em que x ∉ ℝ, Δ< 0 e a > 0:



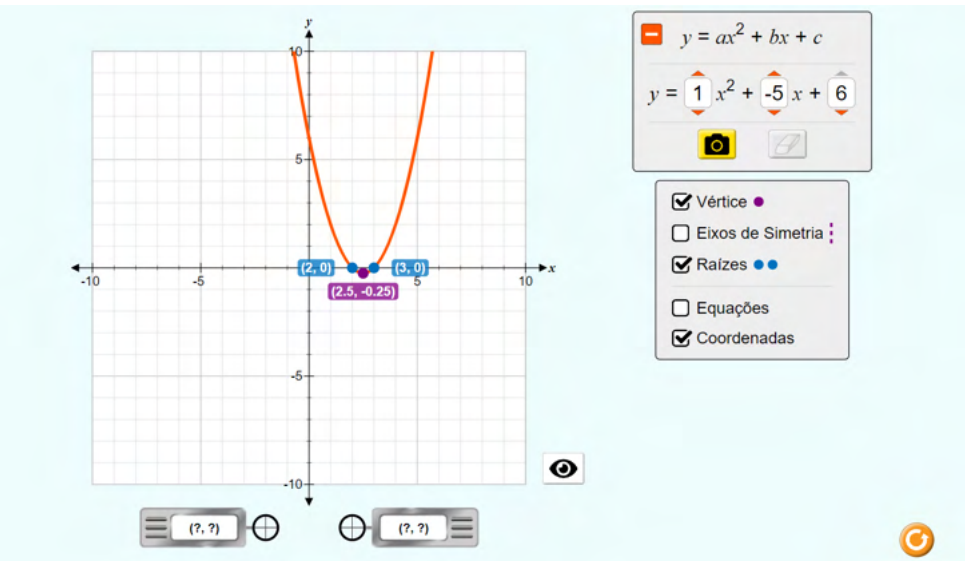
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

- Gráfico 2 em que x’ = x”, Δ = 0 e a > 0:



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

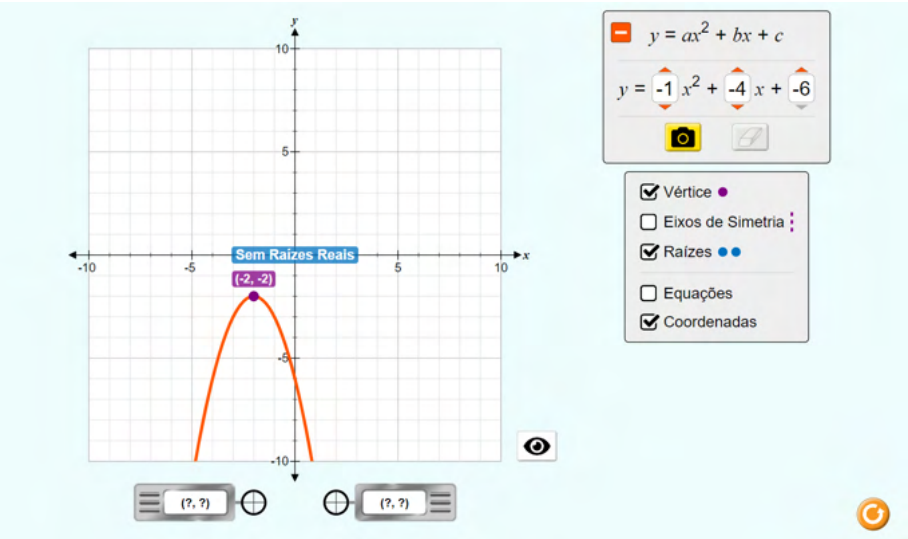
- Gráfico 3 em que x’ ≠ x”, Δ > 0 e a > 0:



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

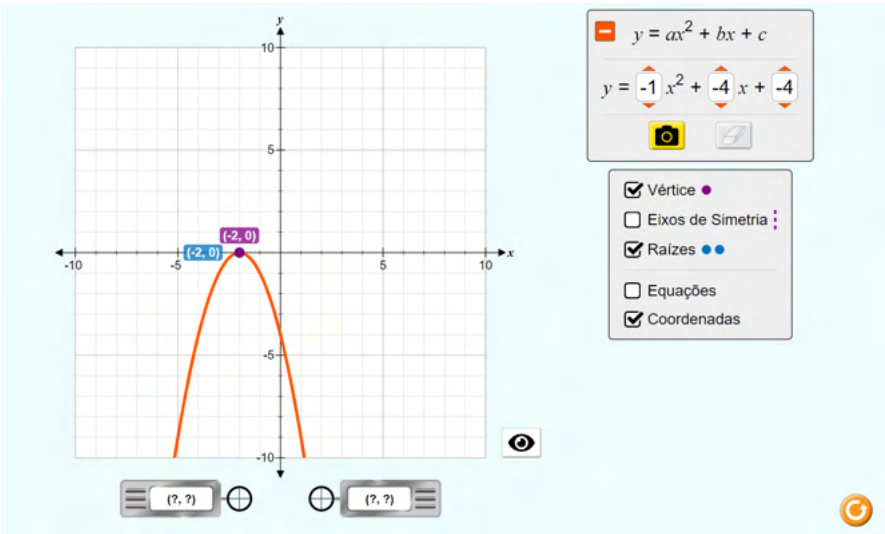
É possível identificar uma situação semelhante nos gráficos 4, 5 e 6 por apresentarem valores acompanhados de x^2 menores que 0 e serem diferentes entre si pelo conceito de zero das funções.

- Gráfico 4 em que $x \notin \mathbb{R}$, $\Delta < 0$ e $a < 0$:



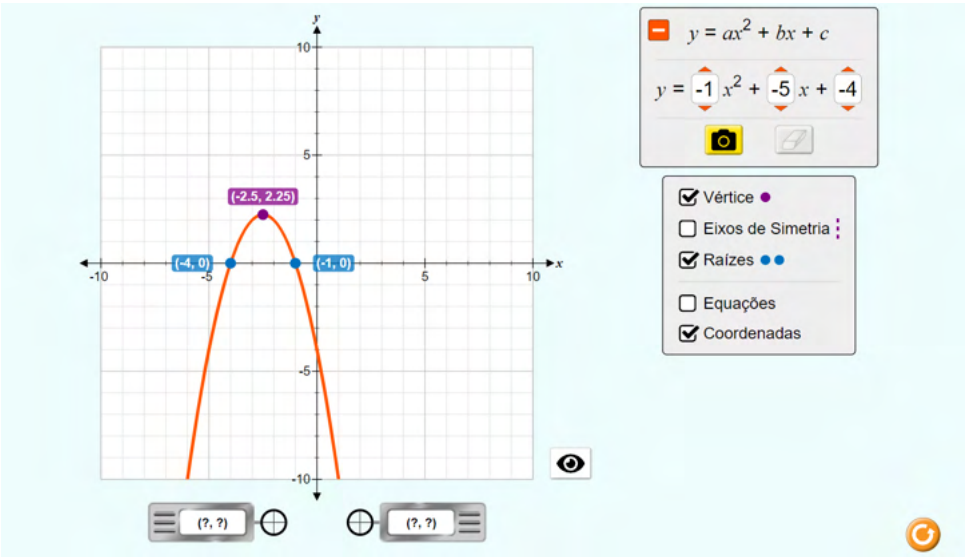
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

- Gráfico 5 em que $x' = x''$, $\Delta = 0$ e $a < 0$:



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

- Gráfico 6 em que x’ ≠ x”, Δ<0 e a < 0:



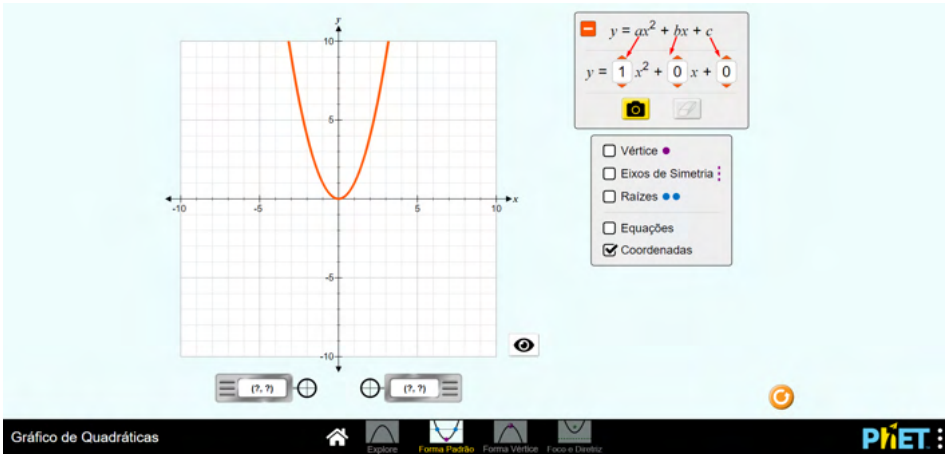
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

APLICAÇÃO DO OBJETO DE CONHECIMENTO

O funcionamento da OED é simples, ao entrar no link (https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html) o usuário será dirigido para uma página padrão em que há diversas opções de planos cartesianos os quais deseja observar.

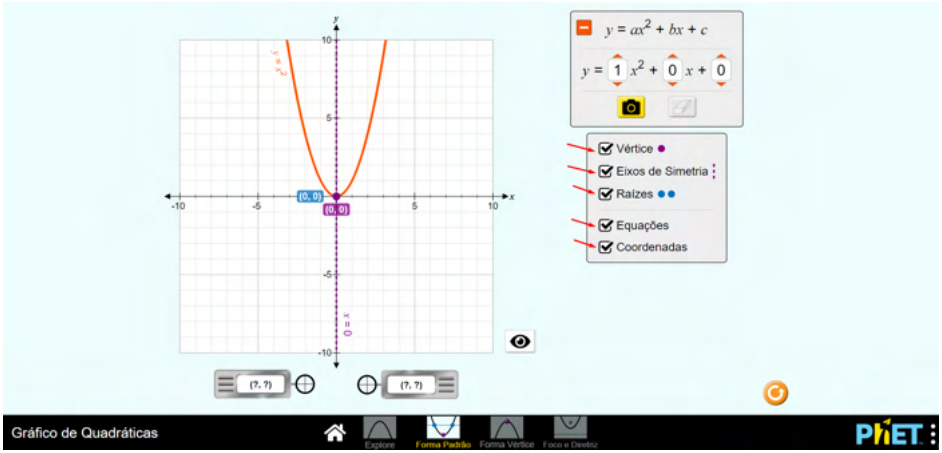
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

A Forma Padrão é a indicada para essa OED, mas fica a disposição do docente qual forma de gráficos de funções polinomiais de 2º grau mais cabe a matéria estudada. Ao acessar a Forma Padrão poderemos ver os valores das variáveis de a, b e c, que são representados, respectivamente, pelos itens apontados pela seta vermelha, como mostrado abaixo. Os valores das variáveis disponíveis no site variam de (-6,6) e podem ser alterados clicando na seta laranja em cima e embaixo das variáveis a, b e c.



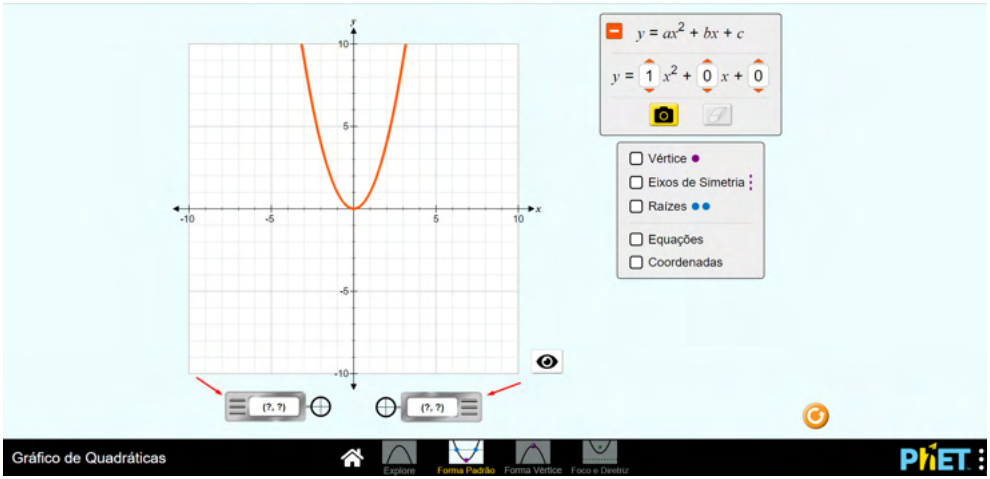
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

No canto mediano direito podemos observar diversas opções da OED para melhorar o conhecimento e permitir uma melhor visualização das funções, como o Vértice, o Eixo de Simetria, as Raízes da função, as Coordenadas e a equação da função ao lado do trajeto da parábola como mostrado nas setas vermelhas da imagem abaixo.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

Abaixo do plano cartesiano há 2 itens que ao passarem pela trajetória da parábola irão mostrar os pontos de trajeto da parábola.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

CONTEXTUALIZAÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> "A matemática desempenha um papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo de trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. A Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música, da informática, do comércio, da meteorologia, das engenharias, das comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2002, p.15)".

Conforme é descrito na PCNs o uso da Matemática está presente em nosso cotidiano com todos os seus detalhes e minúcias. No dia a dia podemos notar a presença da função quando um comerciante pesa determinados itens até alcançar o equilíbrio da balança. Além do mais, diversas construções como Palácio da Alvorada (DF), Ponte Juscelino Kubitschek (DF), Ponte Hercílio Luz (SC), Conjunto da Pampulha – Igreja de São Francisco (MG) e Congresso Nacional (DF) possuem sua infraestrutura em formatos cônicos possíveis de calcular a função. Ademais, sua própria construção teve a necessidade da realização de cálculos detalhados (MIRANDA, 2017).

- **Interdisciplinaridade:**

O tema proposto e a atividade da OED são possíveis ser relacionado com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, o que demonstra a presença da Matemática e suas

Tecnologias em nosso cotidiano. Durante a contextualização das funções polinomiais de 2º grau com as construções históricas ou ações simples como equilibrar o peso numa balança de feira poderemos observar ainda mais a relação da Matemática com a Artes (MIRANDA, et al, 2017).

Área do conhecimento: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Componente Curricular: Artes.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Duração da atividade: 2 aulas de 50 minutos com intervalo de 3 dias.

Competências específicas do componente curricular: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

Habilidades do componente curricular na BNCC: (EM13CHS104) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

Objeto de conhecimento: Observação dos objetos e infraestruturas da residência ou do bairro

- **Exercício:**

Segundo o Governo Federal do Brasil, o Palácio da Alvorada foi projetado por Oscar Niemeyer no mandato de Juscelino Kubitschek. O local é uma das mais importantes edificações do modernismo arquitetônico brasileiro, sendo a residência oficial do presidente do Brasil. Suponha que os formatos cônicos da construção represente a função polinomial de 2º grau $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, podemos afirmar que:

Fonte: https://www.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2016/02/palacio_da_alvorada_exterior__ricardo_stuckert_presidencia_da_republica-ebc.jpg

a) É uma parábola com concavidade voltada para baixo.

b) Seu vértice é o ponto ($3/4$, $1/8$).

c) Intercepta o eixo das abscissas em P(1,0) e Q($1/2$,0).

d) Intercepta o eixo das ordenadas em R(0,-1).

- **Resolução:**

Inicialmente, é necessário o cálculo das raízes da função, ou seja, os valores em que x intercepta o eixo das abscissas como mencionado na teoria dos zeros da função, desse modo:

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Então utilizaremos a fórmula de Bháskara para saber quais valores de x em que f(x) = 0.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Delta = \sqrt{(-3)^2 - 4.2.1}$$

$$\Delta = \sqrt{9-8}$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-(-3) \pm 1}{2.2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x' = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Delta = \sqrt{9-8}$$

$$\Delta = 1$$

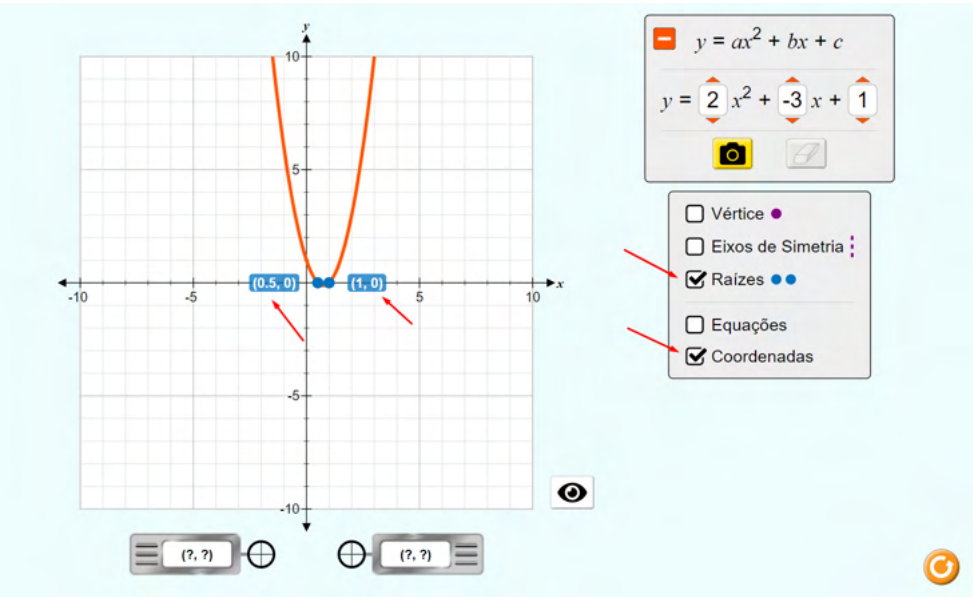
$$x = \frac{-(-3) \pm 1}{2.2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x' = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x'' = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = {}^{1}/_{2}$$

f(0) = 1 e f(0) = $^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}$



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

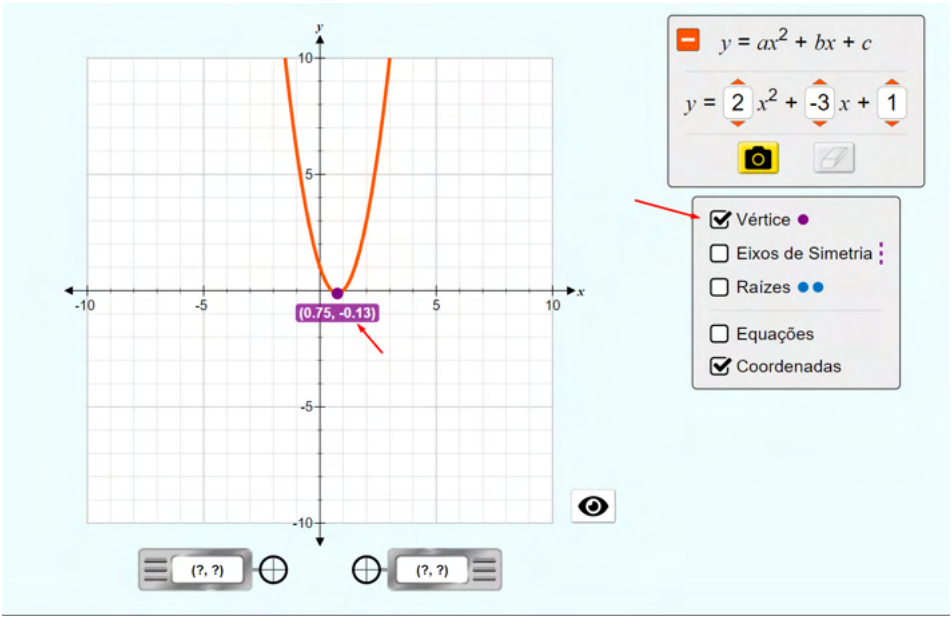
Como demonstrado na imagem acima, podemos observar que o cálculo está correto, além de termos uma noção de como elaborar uma função de polinomial de 2º grau em um plano cartesiano.

a) Ao observarmos a função f(x) = 2x² - 3x + 1 = 0 já sabemos que a > 0, então a função possui uma concavidade voltada para cima e um valor mínimo. **ALTERNATIVA INCORRETA**

b) Para encontrar os valores do vértice da parábola basta colocá-los na fórmula já demonstrada:

$$Vx = {}^{-b}/_{2a} = {}^{-(-3)}/_{2.2} = {}^{3}/_{4}$$
$$Vy = {}^{-\Delta}/_{4a} = {}^{-1}/_{4.2} = {}^{-1}/_{8}$$

Desse modo, os vértices da parábola são ($3/_4$, $-1/_8$).

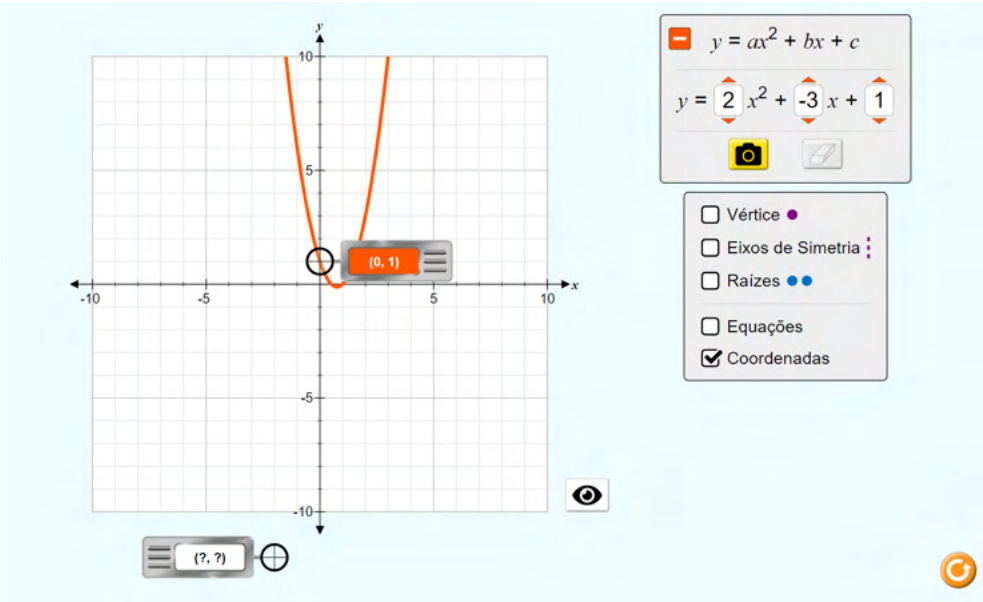


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

Pode-se observar na OED os pontos do Vértice e suas coordenadas no plano cartesiano, além disso temos o valor mínimo que é $-1/_8$ ou -0,13 como mostrado na figura acima. **ALTERNATIVA INCORRETA**

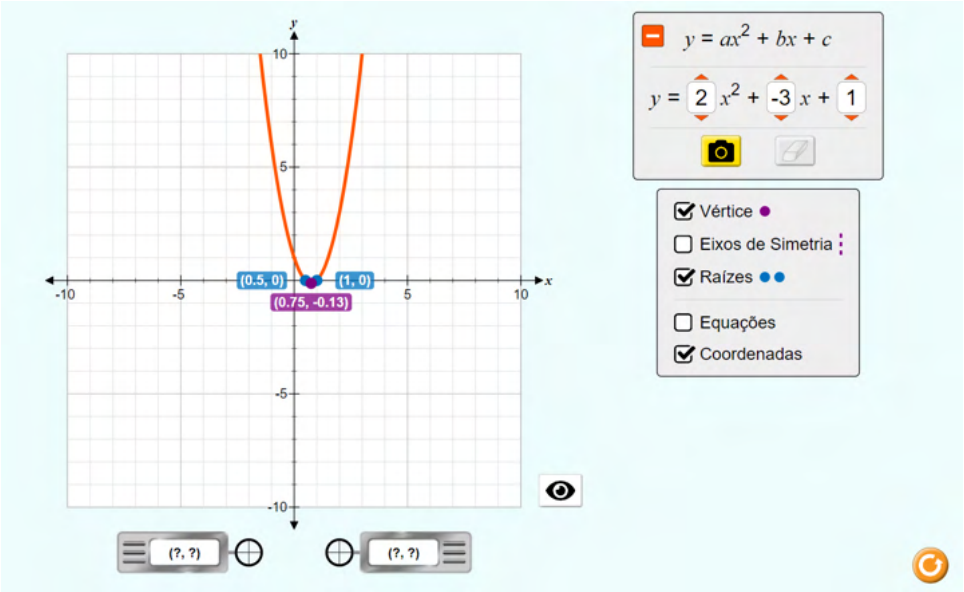
c) A interceptação do eixo das abscissas ocorre quando um ponto apresenta x ϵ ℝ e y = 0. Desse modo, podemos obtê-las ao calcular as raízes da função. A partir disso, os pontos que interceptam o eixo das abscissas é P(1,0) e Q($1/_2$,0). **ALTERNATIVA CORRETA**

d) A interceptação do eixo das ordenadas ocorre quando um ponto apresenta x = 0 e y ϵ ℝ. Então quando x = 0 sobrará apenas a variável c, que representa o ponto onde intercepta o eixo das ordenadas. Essa situação é possível ser observada abaixo por meio da OED. **ALTERNATIVA INCORRETA**



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

O gráfico completo está demonstrado abaixo, sendo possível selecionar a Equação para ficar ao lado do trajeto da parábola. Essa OED tem como intuito facilitar a elaboração de gráficos de funções polinomiais de 2º grau, amparando o aluno na compreensão visual de cada conceito das propriedades da função polinomial de 2º grau de forma simplificada. Levando em consideração o exercício, a interdisciplinaridade entre as disciplinas de Artes e História é extremamente relevante, por poderem contemplar a arquitetura da época e o período em que foi construído o Palácio da Alvorada. A interdisciplinaridade permite ainda que o professor explore as construções antigas da cidade e a história do local, fazendo com que a Matemática seja mais vista do que apenas números.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_pt_BR.html

REFERENCIAL TEÓRICO

A implementação da Educação Básica como obrigatória desde os anos iniciais até o Ensino Médio, bem como a própria BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) atualizadas são recentes. Devido ao golpe militar de 1964 diversos profissionais e pensadores da educação foram calados, exilados ou até mesmo mortos, resultando numa educação defasada. Entretanto, a reformulação da educação já acontecia no exterior em universidades, inovando o cenário sobre metodologias ativas de aprendizagem. Em virtude disso, em meados do século XX, Paulo Freire trouxe a ideia de que o ensino deveria ser centrado no aluno de acordo com o ambiente social em que está inserido. Enquanto Piaget e Vygotsky postulavam teorias de como a aprendizagem ocorria, o que resultou em tentativas de melhorias na educação dos dias atuais (DA ROCHA; DE FARIAS, 2020, p.72).

Nos Estados Unidos da América (EUA), na universidade de Harvard do curso de Direito, o professor John Dewey desenvolveu a Aprendizagem Baseada em Problemas, também chamada de PBL (*Problem-Based Learning* ou *Project-Based Learning*). Dewey formulou uma metodologia ativa em que os discentes eram postos diretamente no processo de aprendizagem a partir de problemas relacionados com a matéria da grade curricular. Desse modo, nessa metodologia os alunos assumem o papel central do ensino e são detentores do seu próprio conhecimento. Já o professor assume o papel de tutor, orientando seus alunos durante o processo de aprendizagem (MORAN, 2017, p. 11).

O PBL consiste em um problema inicial da grade curricular escolhida pelo tutor que

deve ser discutido por todos os estudantes em grupo. Em seguida ocorre um *brainstorming*, sem que nenhuma ideia ou conceito seja considerado errado de imediato. Após isso, as ideias que não condizem ou incoerentes são descartadas e perguntas a respeito do tema são geradas para serem pesquisadas posteriormente em casa. A instituição escolar ou universitária poderá indicar referências ou fontes bibliográficas para o estudo, entretanto, cabe ao aluno pesquisar e fazer uso de fontes confiáveis em seu estudo. Em um novo encontro com os colegas e o professor, os estudantes deverão explicitar o que aprenderam e fomentar o conhecimento obtido (LOVATO; MICHELLOTI; DA SILVA LORETO; 2018, p. 163).

Essa metodologia ativa se embasa nos princípios de senso crítico, participação, colaboração, raciocínio lógico, argumentação e capacidade de trabalho em equipe, auxiliando na formação de um sujeito autônomo. A partir disso, pode-se concluir que a OED pode atuar diretamente no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes, permitindo que o conhecimento seja fixado na memória operacional dos estudantes (LOVATO; MICHELLOTI; DA SILVA LORETO; 2018, p. 163).

METODOLOGIA

A aplicação da OED juntamente com o PBL requer alguns itens das instituições escolares, como sala de informática com computadores com sistema operacional requerido e acesso à internet; sala de aula com lousa, caso necessário, para exemplificar e anotar dados do *brainstorming*; e biblioteca com um acervo considerável a respeito do assunto discutido. A instituição escolar pode ainda oferecer fontes confiáveis para amparar em casos de dúvidas a respeito do assunto. Considerando que o PBL requer que os estudantes em questão discutam sobre o tema, é necessário pensar na quantidade de alunos numa sala de aula. A indicação de discentes é de 30 alunos, sendo 1 deles com função de moderador da discussão e 1 aluno como responsável por anotar os pontos importantes na lousa. Apesar desses 2 alunos terem funções específicas, isso não exclui sua participação também de forma ativa e fala. O professor terá a função de tutor, intervindo somente em situações necessárias para guiar os alunos no caminho do conhecimento.

Para um bom funcionamento da OED é necessário um contato antecipado e preparo da metodologia ativa tanto dos professores quanto dos alunos. Pode ser realizada uma atividade similar com um tema simples para orientar os estudantes e docentes de como proceder. Além disso, a instituição escolar deve ter uma quantidade significativa de computadores com acesso a internet. Caso a escola não disponha poderá dividir os 30 alunos em 10 grupos menores de 3 estudantes para 10 computadores e indicar que esses alunos realizem também a atividade em casa. Supondo que o contexto social dos discentes não seja possível o acesso à internet em suas residências, a escola poderá oferecer um horário alternativo em que os estudantes se dirijam a instituição escolar para realizar a

atividade.

PLANEJAMENTO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO

- **Situação problema:**

O sonho de João era ser cientista, então numa feira de profissões de uma universidade da sua cidade ele foi direto conhecer o laboratório de Análises Clínicas. Ao chegar lá se deparou com vários utensílios que lhe trouxeram curiosidade, principalmente uma estufa bacteriológica. O coordenador do passeio lembrou da importância da interdisciplinaridade, já que não estudavam apenas Biologia, mas também Matemática. Desse modo, lançou um desafio aos alunos ali presente:

Supondo que a temperatura "t" de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora "h" do dia, pela expressão $t = h^2 - 11h + 24$. Responda, qual é o momento em que h é 0ºC e qual a temperatura mínima.

Fonte: https://www.splabor.com.br/blog/wp-content/uploads/2016/06/estufa-de-cultura.jpg

- **Proposições de problemas:**

1. Quais utensílios são comuns num laboratório de Análises Clínicas?
2. O que é uma estufa bacteriológica?
3. O que é função polinomial de 2º grau?
4. Realizar o desafio e utilizar a OED para se orientar.

A apresentação da situação problema, bem como proposições de problemas e referências bibliográficas serão realizadas em uma aula de 50 minutos, podendo contar com a participação dos docentes de Matemática e Biologia, dividindo aleatoriamente a

turma de 30 alunos em 3 turmas de 10 discentes. Inicialmente, o docente irá perguntar se dois alunos se voluntariam para ser mediador do diálogo e outro para anotar as dúvidas na lousa. Caso ninguém se voluntarie, então o professor poderá escolher. A partir da situação problema os alunos devem se questionar a respeito dos conteúdos e chegar em proposições do problema. Para garantir que os alunos não se percam, o docente será responsável por intervir em momento oportunos para orientar os alunos e guiá-los até as questões. Ao final desses 3 momentos o professor deve indicar as referências bibliográficas confiáveis e com embasamento científico para despertar o senso crítico dos alunos. Na aula seguinte os alunos devem apresentar o que aprenderam. Ademais, outras informações e dicas já foram mencionadas.

- **Interdisciplinaridade:**

Área do conhecimento: Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Componente Curricular: Biologia.

Nível de ensino: Ensino Médio.

Duração da atividade: 2 aulas de 50 minutos com intervalo de 3 dias.

Competências específicas do componente curricular: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Habilidades do componente curricular na BNCC: (EM13CNT202) Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Objeto de conhecimento: Observação dos utensílios de um laboratório de Análises Clínicas, bem como o crescimento bacteriano.

- **Busca de informação:** a partir das fontes bibliográficas os alunos poderão responder às proposições do problema de forma correta e com embasamento científico. Caso sintam dúvida, o professor poderá enviar vídeos ou artigos que possam explicar de maneira sucinta.

Atenção:

Vídeo sobre bactérias: (https://youtu.be/TUwFTUQrPjA)

Vídeo sobre função polinomial de 2º grau: (https://youtu.be/1cqNdPSB_nY)

Esse processo ocorrerá fora do horário de aula, como um exercício para casa. Os alunos poderão fazer uso de tecnologias digitais, livros do acervo da escola ou próprios. Como mencionado, caso os alunos não tenham acesso a internet ou outros meios eletrônicos poderão ir até a escola num horário disponibilizado pela instituição escolar.

A atividade pode ser realizada individualmente ou em grupo, dependendo de cada aluno.

- **Elaboração das conclusões:** os discentes com suas respectivas turmas deverão discutir o que cada um pesquisou e descobriu referente a situação problema. Todos os alunos devem participar e o mediador tem o papel importante de garantir que as pessoas mais tímidas possam falar. O interessante seria os alunos realizarem a atividade grupalmente para que possam desenvolver o trabalho em equipe.
- **Generalização das conclusões e sínteses:** após as discussões o professor pode perguntar se alguém se voluntaria para resumir o que foi aprendido. Caso ninguém se voluntarie ele poderá escolher, ou até mesmo o próprio docente fazer a síntese do assunto.

A elaboração das conclusões e a generalização das conclusões e sínteses ocorrerão em uma aula de 50 minutos com a mesma conformação de grupos. O intervalo entre o primeiro momento da apresentação do problema até a segunda aula deverá ser de 3 dias, para permitir que os alunos possam se preparar durante esse período.

- **Exercícios de Memorização:** para auxiliar os alunos na fixação da matéria na memória operacional é indicado uma lista de exercícios, tanto para prepará-los para as provas, quanto para orientá-los em outras visões de mundo em que todas as disciplinas estão unidas.

Atenção:

Dica de lista de exercícios de funções polinomiais de 2º grau: (https://docente.ifrn.edu.br/igornunes/disciplinas/1oano_ensino_medio/funcao_do_2o_grau/exercicios_funcao_do_2o_grau)

- **Prova ou Exame:** o docente poderá se basear em alguns exercícios da lista de problemas exemplificada. A forma de realização das questões fica a critério do professor, mas devem ser condizentes com as matérias. Não deve ser cobrado nada além do que explicado e discutido durante as atividades do PBL.
- **Avaliação:** durante essa unidade do PBL deverá ocorrer a devolutiva do desempenho do aluno, tanto nas aulas de situação problema quanto na prova. É indicado na avaliação dos alunos perceber mudanças em pessoas tímidas, trabalho em equipe, senso crítico e desenvoltura de quem está apresentando. O docente pode realizar uma aula para que os alunos se auto avaliem ou avaliem um colega para que juntos possam buscar melhorias. Já o professor pode criar um Google Forms para que os alunos descrevam suas dificuldades e digam suas críticas, seja do professor ou do próprio método. Isso permite buscar novas formas de adaptação da metodologias para que os alunos aprendam com qualidade.

REFERÊNCIAS

Google Acadêmico: https://scholar.google.com.br/schhp?hl=pt-BR&as_sdt=0,5

AutoLac: https://autolac.com.br/blog/equipamentos-de-laboratorio-de-analises-clinicas-suas-funcoes/

SOARES, Jobson Hugo de Sousa. Função quadrática. 2013. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

PhET – Physics Education Technology. *University of Colorado Boulder*. Disponível em: http://phet.colorado.edu/. SHARE YOUR SKY. Acesso em: 29 out, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. O Palácio da Alvorada é a Residência oficial do presidente do Brasil. Governo Federal. Disponível em: https://www.gov.br/planalto/pt-br/conheca-a-presidencia/palacios-e-residencias/palacio-da-alvorada#:~:text=O%20Pal%C3%A1cio%20da%20Alvorada%2C%20projetado,em%20alvenaria%20na%20nova%20capital.&text=O%20Pal%C3%A1cio%20tem%20configura%C3%A7%C3%A3o%20horizontal,de%20fazenda%20do%20Brasil%20colonial. Acesso em: 27 nov, 2021.

BRASIL. PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. Ministério da Educação. 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 28 out, 2021.

DA ROCHA, Carlos José Tridade; DE FARIAS, Sidilene Aquino. Metodologias ativas de aprendizagem possíveis ao ensino de ciências e matemática. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 8, n. 2, p. 69-87, 2020.

DA SILVA. M. N. P. Exercícios sobre Função de 2º grau. Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-2-o-grau.htm. Acesso em: 28 out, 2021.

LOVATO, Fabricio Luís; MICHELOTTI, Angela; DA SILVA LORETO, Elgion Lucio. Metodologias ativas de aprendizagem: uma breve revisão. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 2, 2018.

MIRANDA, Gabriela Ferreira de et al. Função quadrática e suas aplicações no cotidiano. 2017.

MORAN, José. Metodologias ativas em sala de aula. **Pátio Ensino Médio, ano X**, n. 19, p. 11-13, 2017.

PhET – Physics Education Technology. ***University of Colorado Boulder***. Disponível em: http://phet.colorado.edu/. SHARE YOUR SKY. Acesso em: 29 out, 2021.

SOARES, Jobson Hugo de Sousa. **Função quadrática**. 2013. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

CAPÍTULO 13

GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: ENTRE CONCEPÇÕES, PLANOS E AÇÕES

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 24/01/2022

Amanda Souza Araújo
Universidade Federal de Sergipe
Aracaju – Sergipe
http://lattes.cnpq.br/7599730009823437

Simone Damm Zogaib
Universidade Federal de Sergipe
Aracaju – Sergipe
http://lattes.cnpq.br/7186428804817743

RESUMO: A geometria é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático na infância. Desse modo, é essencial que esteja presente nos planos e ações educativas desde a educação infantil. Este artigo apresenta um recorte de uma pesquisa sobre concepções sobre geometria de quatro professoras da educação infantil de uma escola do município de São Cristóvão. Aborda os resultados principais de uma análise documental sobre geometria nos planos semanais das professoras participantes. Dentre eles, destacam-se: atividades com amplo potencial para desenvolvimento do pensamento geométrico de crianças, porém ainda pouco exploradas; prevalência de atividades relacionadas à aritmética em detrimento da geometria e outros campos matemáticos. Conclui, reiterando a necessidade de um trabalho intencional e sistemático de geometria para e com as crianças.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Infantil. Geometria. Concepções docentes. Planejamento. Formação docente.

GEOMETRY IN PREESCHOOL EDUCATION: BETWEEN CONCEPTS, PLANS AND ACTIONS

ABSTRACT: Geometry is fundamental for the development of mathematical thinking in childhood. Thus, it is essential that it be present in educational plans and actions from early childhood education onwards. This article presents an excerpt from a research on conceptions about geometry of four early childhood teachers from a school in the municipality of São Cristóvão. It addresses the main results of a document analysis on geometry in the weekly plans of the participating teachers. Among them, the following stand out: activities with ample potential for the development of children's geometric thinking, but still little explored; prevalence of activities related to arithmetic to the detriment of geometry and other mathematical fields. It concludes by reiterating the need for an intentional and systematic work on geometry for and with children.

KEYWORDS: Early Childhood Education. Geometry. Teaching conceptions. Planning. Teacher training.

1 I INTRODUÇÃO

Que concepções teriam os professores da educação infantil a respeito do trabalho com geometria nesta etapa da educação básica? O que encontramos sobre esse campo matemático nos planos elaborados pelos docentes da

educação infantil? E, ainda, que atividades referentes à geometria são realizadas com as crianças, levando em consideração o trabalho com os campos de experiências indicados na BNCC (BRASIL, 2017)? Essas questões nortearam a pesquisa que realizamos com quatro professoras da educação infantil de uma escola do município de São Cristóvão – SE a respeito das concepções de geometria que permeavam suas falas, planos e ações. Neste artigo, vamos nos ater a uma análise documental dos planos semanais elaborados pelas docentes para o trabalho com as crianças de duas turmas da educação infantil (4 e 5 anos), durante aulas remotas, em virtude da pandemia ocasionada pelo coronavírus.

Entendemos que a geometria é um campo importante de aprendizagem da matemática na primeira infância e precisa estar presente, de modo planejado e sistemático, na educação de crianças pequenas. A capacidade dessas crianças em aprender geometria pode apoiar o seu desenvolvimento global matemático e cognitivo (CLEMENTS; SARAMA, 2011). Infelizmente, segundo esses autores, o trabalho com geometria tem sido frequentemente ignorado ou minimizado nos currículos da educação infantil e, mesmo quando incluído, geralmente se restringe às figuras geométricas, principalmente as planas.

Em relação a esse aspecto, pesquisadores brasileiros da educação matemática como Lorenzato (2006), Smole, Diniz e Cândido (2003), Muniz (2010; 2014) destacam que a matemática para crianças ainda prioriza números e contas e, quando muito, a geometria na infância tem por foco o reconhecimento de figuras geométricas, como círculo, quadrado, retângulo e triângulo, e basicamente em nomeá-las, não em estudá-las por suas propriedades. Recomendam um trabalho com geometria na educação infantil "que contemple simultaneamente três aspectos para o seu pleno desenvolvimento [da criança]: a organização do esquema corporal, a orientação e percepção espacial e o desenvolvimento de noções geométricas propriamente ditas" (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2003, p. 17).

Encontramos também nos estudos de pesquisadores internacionais (CLEMENTS, 2004; CLEMENTS; SARAMA, 2011; MENDES; DELGADO, 2008) o quanto é fundamental o trabalho com geometria na infância, enfatizando-se a necessidade do desenvolvimento do sentido espacial das crianças. Tais autores defendem que "uma interpretação do espaço, movimentação e localização de pessoas e objetos, precisa ser enfatizado desde a Educação infantil" (ZOGAIB, 2021, p. 148). Pois, essas experiências com as crianças contribuem para o desenvolvimento das habilidades principais do sentido espacial, quais sejam, a orientação espacial e a visualização espacial. Em relação a esses últimos aspectos, temos que:

> Embora se reconheçam a necessidade e importância da Geometria na Educação Infantil, pesquisadores e estudiosos da Educação Matemática reiteram que o desempenho internacional em Geometria é baixo e esses défices são identificados já nos primeiros anos de vida. Por isso, é necessário investir em mais pesquisas que envolvam tanto o conhecimento geométrico quanto as crianças, as escolas e seus professores, pois, embora importante e necessária, a geometria, segundo tais estudiosos, não desempenha um papel significativo na pesquisa (ZOGAIB, 2020, p. 89).

Além da escassez de pesquisas sobre a temática, sublinhamos que a geometria não tem desempenhado um papel significativo nas práticas educativas na educação infantil. Pois, de acordo com Clements *et al* (2018, p. 8), "é um dos domínios menos compreendidos pelos professores de crianças pequenas em muitos países e com efeitos negativos". Com algumas exceções, docentes de diversão países não tiveram uma formação consistente para o trabalho de geometria para e com as crianças. Assim, "a falta de conhecimento de geometria e educação em geometria afeta as novas gerações" (CLEMENTS; SARAMA, 2011, p. 136).

Diante desse contexto, Zogaib (2019) reafirma o direito de acesso das crianças ao conhecimento matemático/geométrico como uma das prerrogativas do exercício da cidadania na infância. E reitera o papel da educação infantil como primeira etapa da educação básica e, portanto, evidencia sua responsabilidade de assegurar às crianças, como sujeitos históricos e culturais, a apropriação e ampliação do universo cultural por meio do acesso ao conhecimento sistematizado no decorrer da história da humanidade.

2 I CAMINHO METODOLÓGICO DE PESQUISA

O presente estudo assume uma abordagem de pesquisa qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986; 2013), uma vez que o nosso objetivo consistiu em analisar os conhecimentos geométricos manifestados pelas professoras da Educação Infantil em suas falas, planejamentos e ações realizados para as crianças. E, para tal, é indispensável uma interação entre o investigador e o campo de estudo, analisando não somente o ambiente em questão, mas também as relações e sua influência nas concepções do objeto investigado.

Como procedimentos metodológicos para a pesquisa de campo, aplicamos um questionário online com as quatro professoras participantes, com a intenção de conhecer as suas concepções sobre geometria na Educação Infantil. Com base neste levantamento e reflexão sobre suas perspectivas, realizamos uma análise documental (SOUZA; KANTORSKI; LUIS, 2011; MARCONI; LAKATOS, 2005; LIMA JUNIOR et. al., 2021) dos planejamentos anuais e semanais elaborados pelas educadoras para o ano de 2020. Como já indicamos, neste artigo, apresentamos os resultados referentes a análise do planejamento semanal, que se constituiu como fonte primária de pesquisa,cuja análise teve o intuito de averiguar o que foi proposto para o trabalho com geometria para as crianças do Infantil II, como era nomeada a turma na faixa etária de 4 e 5 anos.

De acordo com Souza, Kantorski e Luis (2011, p. 223), uma análise documental tem como objetivo "identificar, verificar e apreciar os documentos com uma finalidade específica e nesse caso, preconiza-se a utilização de uma fonte paralela e simultânea de informação para complementar os dados e permitir a contextualização das informações contidas nos documentos". Desse modo, utilizamos a análise documental na perspectiva técnica voltada a alcançar um objetivo específico, em colaboração com as informações provenientes de

outras fontes (SOUZA; KANTORSKI; LUIS, 2011), como foi o caso dos questionários respondidos, com o objetivo de estabelecer relações entre as concepções das professoras sobre o seu trabalho com a geometria compiladas através do questionário, juntamente com os documentos concedidos pelas professoras para um maior encadeamento de ideias.

Embora tenhamos analisado os planejamentos anuais e semanais para o ano de 2020 cedidos pelas professoras participantes, optamos por apresentar neste artigo a análise relacionada ao planejamento semanal. O motivo dessa escolha foi o fato de que, no momento de realizaçao do planejamento anual, nem sequer se imaginava uma pandemia como a que estamos enfrentando, muito menos a suspensão das atividades escolares e, posteriormente, a adoção do ensino remoto. Assim, os planos semanais foram construídos na retomada das aulas, de modo remoto e, encontram-se relacionados a essa nova realidade.

3 I PLANEJAMENTO SEMANAL E A GEOMETRIA PARA CRIANÇAS

O planejamento semanal revela de maneira mais específica e concreta como será o trabalho do professor, com uma riqueza de detalhes que o plano anual não é capaz de informar. Por meio dele, o educador direciona que objetivos deseja alcançar, a cada semana, priorizando temas de maior interesse do aluno, adaptando-se às especificidades e ao que surge diariamente na turma, com uma diversidade de procedimentos que facilitam o desenvolvimento da criança. Além das adaptações e alterações que são esperadas em relação ao plano anual, o planejamento semanal que analisamos apresentou uma série de adequações, uma vez que, como indicamos, o planejamento anual foi elaborado antes de iniciar a pandemia.

Em virtude do período pandêmico, as aulas foram suspensas no início do mês de março do ano de 2020, retornando somente no mês de agosto do mesmo ano, adotando-se o ensino remoto. Por isso, os planejamentos semanais que analisamos correspondem ao período datado desde 03 de agosto à 20 de novembro de 2020. A estrutura do planejamento semanal foi desenvolvida pela SEMED - Secretaria Municipal de Educação de São Cristóvão - e encaminhada às instituições para a organização das aulas adequadas ao período de aulas remotas. Tem como referência a BNCC (BRASIL, 2017) e o Currículo de Sergipe (2018).

O desenho estrutural (Figura 1) apresenta os passos esquematizados para planejamento semanal no contexto do ensino remoto, indicando elementos para amparar tanto o educador, quanto os pais e alunos, que precisam mais do que nunca estarem unidos, com o objetivo de garantir, ainda que seja o mínimo de aprendizagens às crianças. Como é possível observar, o planejamento em questão aborda um dos elementos da estrutura curricular proposta pela BNCC (BRASIL, 2017) - os campos de experiência, que acolhe as vivências diárias das crianças, tecendo suas experiências com os conhecimentos

estabelecidos para sua faixa etária. Na estrutura do planejamento em questão, não há indicação dos direitos e também dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento, também previstos pela BNCC. No esquema a seguir, observamos os itens dispostos no planejamento semanal na ordem dos segmentos compatíveis com a modalidade de ensino adotada (Figura 1).

Figura 1 – Desenho estrutural do planejamento semanal.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

A **Leitura Deleite** constitui uma ferramenta didático-pedagógica que tem como intenção incentivar o interesse das crianças pela literatura infantil. No ensino remoto, a leitura, principalmente a contação de histórias, por meio de tecnologias digitais, foi o principal instrumento utilizado. Neste segmento, as professoras trabalharam com vídeos interativos da Plataforma Youtube, também indicados pela Secretaria de Educação, para desencadear a maioria das atividades enviadas às crianças e seus responsáveis.

No segmento dos **Conhecimentos e Saberes**, o professor estabelece quais temas serão trabalhada a cada dia, semana e mês. Observamos que nestes quatro meses de aula remota, as professoras priorizaram atividades que estimulavam os conhecimentos voltados predominantemente às áreas de Português e Matemática, apresentando-se em uma média de 80% em todo o planejamento, em comparação com as aréas de Ciências, História e Geografia. Em relação à matemática, os educadores exploraram majoritariamente atividades do domínio numérico, enquanto que a geometria, foco de nosso estudo, foi menos evidenciada.

Um dos itens incorporado ao planejamento no ensino remoto e bastante utilizado pelas educadoras foi **o Caderno Travessia**. Consiste em um recurso criado pela Secretária Municipal de São Cristóvão, no contexto de um projeto que procura fortalecer a aprendizagem da criança, neste momento de pandemia, em uma parceria entre a escola,

família e os educandos. É composto por sugestões lúdicas de brincadeiras populares, construção de jogos, recomentações de histórias infantis, disponibilizando também os links para acesso aos vídeos das história selecionadas, além de atividades e orientações para sua realização.

O item de **Orientações para pais/responsáveis e estudantes** também foi incluído no planejamento semanal. Tornou-se imprescindível, visto que, com o contexto já exposto anteriormente, a participação dos pais nesse processo de aprendizado das crianças configurou-se ainda mais indispensável. Entretanto, muitos não estavam e até hoje não se sentem preparados para esse compromisso, apresentando bastante dificuldade para ajudar seus filhos nesta missão educativa.

Nesse contexto, tem se constituído também um desafio orientar os pais e/ou responsáveis sobre como podem e precisam auxiliar as crianças no momento da atividade, levando em consideração que eles não estão habituados e/ou preparados profissionalmente para conduzir o ensino de seus filhos. Por isso, o educador se vê diante da situação de ter que planejar e registrar semanalmente tais orientações e, portanto, pensar na forma mais adequada de transmiti-las, na linguagem utilizada, no detalhamento dos passos a serem seguidos, para que, de algum modo, possa mediar a realização das atividades pelas crianças, mesmo a distância.

Por último, estão os **Recursos Complementares**, utilizados pelas professoras, e também pelas crianças e seus responsáveis em casa, para alcançar os objetivos de cada aula. Ao verificar os recursos indicados por elas em seus planejamentos, observamos que estava previsto um trabalho com as crianças que envolvia contações de histórias infantis, vídeos autoexplicativos e educativos, atividades impressas disponibilizadas na instituição de ensino, o caderno travessia, e a confecção de brinquedos. Esta relação de recursos é necessária ao planejamento para uma maior organização do que será preciso para executar as atividades, e apresentam uma conexão com os recursos explicitados no planejamento anual, reforçando que, essa afirmação se refere em particular aos quatro meses do planejamento semanal a que tivemos acesso.

Para melhor visualização da relação de atividades matemáticas que foram planejadas semanalmente no período de agosto a novembro de 2020, apresentamos no Quadro 1, o quantitativo dessas atividades e a sua relação com os campos matemáticos de números, geometria e medida. Contabilizamos cerca de 62 atividades relacionadas à matemática, dentre as quais 44 relacionavam-se ao trabalho com números e operações, 10 às grandezas e medidas e 08 à geometria. Ressaltamos que, em relação à geometria, indicamos, no quadro, atividades que estavam explícitas como de cunho geométrico – noção de dentro e fora; reconhecimento de figuras geométricas. Também incluímos outras que, pela orientação didática indicada no planejamento, relacionavam-se ao campo da geometria – representação visual de elementos da história e construção de brinquedos.

Campos matemáticos	Atividades Matemáticas	Quantitativo
Números	Registros gráficos de números	11/62
	Adição e Subtração	10/62
	Relação entre números e quantidades	07/62
	Ordem numérica	03/62
	Contagem de personagens, espaços, objetos	03/62
	Dúzia e meia dúzia	03/62
	Antecessor e sucessor	02/62
	Sequência numérica	02/62
	Números ímpares e pares	02/62
	Números em diferentes contextos	01/62
	Total parcial	**44/62**
Medidas	Comparação-tamanho, cor, objetos, conjuntos	07/62
	Tempo – dia/noite; calendário	02/62
	Massa - quilo	01/62
	Total parcial	**10/62**
Geometria	Reconhecimento de figuras geométricas	03/62
	Construção de brinquedos	03/62
	Noção de espaço (dentro e fora)	01/62
	Representação visual dos elementos da história	01/62
	Total parcial	**08/62**
	Total	**62/62**

Quadro 1 – Comparativo de atividades matemáticas no planejamento semanal.

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras.

O quadro acima reafirma o que educadores matemáticos dedicados aos estudos com crianças (LORENZATO, 2006; SMOLE, 2003; MUNIZ, 2010; 2014) já têm indicado – a ênfase muito maior que se dá ao campo da aritmética em detrimento dos outros. Não discutimos aqui a importância do conhecimento matemático referente aos números e operações. Mas reiteramos que conceitos matemáticos relacionados a outros campos são igualmente importantes e as lacunas de não desenvolvê-los desde cedo são sentidas no decorrer da vida (ZOGAIB, 2019).

Quanto às atividades matemáticas de geometria presentes no planejamento semanal, informamos que as três tarefas de reconhecimento de figuras geométricas decorrem da **Leitura Deleite**, indicada por meio dos vídeos “Fui morar numa casinha, “O Patinho Feio”, e “A casa sonolenta” [1]. Essa última também foi base para a tarefa de reprodução visual

1 Os três vídeos encontram-se disponíveis no Youtube, pelos seguintes links, respectivamente:
www.youtube.com/watch?v=VJQaBK70f24;
www.youtube.com/watch?v=lJWJvxRPQuw;
www.youtube.com/watch?v=b6y2pgqmhgw

de elementos da história. Incluímos a construção de brinquedos – bola no cesto, casa de papelão e chapéu de soldado – porque as orientações didáticas envolviam o trabalho com conceitos geométricos, tanto de espaço como de forma. Por exemplo, com a confecção do chapéu de soldado, as professoras inseriram, na orientação aos pais, a sugestão de brincadeiras que envolvessem as noções espaciais de posição, localização e direção: para cima, para baixo, para frente, para trás, para a direita para a esquerda, importantes para o desenvolvimento da orientação espacial, uma das habilidades espaciais que constituem o sentido espacial das crianças e adultos (ZOGAIB, 2019; 2020). Embora, não esteja explícito no planejamento, o próprio exercício de dobradura para a confeção do chapéu envolve uma série de noções e movimentos geométricos como rotação, translação e reflexão (MENDES; DELGADO, 2008).

De modo geral, a geometria neste planejamento semanal está expressa por meio de atividades que exploram o espaço, orientam a confecção de brinquedos, desenvolvem a percepção visual, promovem a identificação das formas geométricas, além de trabalhar noções espaciais de localização, posição e direção. É interessante pontuar que, a partir da leitura deleite, foi possível planejar tarefas que envolviam diferentes campos, o que pode promover um trabalho integrado entre eles.

> Essa prática pressupõe uma relação entre a matemática e outras áreas de saber, especialmente a língua materna. Afinal, aproximar essas linguagens por meio de práticas pedagógicas na escola é reiterar o que já acontece na vida, só que de forma consciente e intencional, com uma finalidade educativa (AZEVEDO; ZOGAIB, VIANA, 2021, p. 5).

Ao recolher estas informações que se encontram distribuidas por todo o plano, como apresentado no Quadro 1, identificamos que na terceira semana do mês de agosto (Figura 2) houve uma quantidade maior de conceitos geométricos mobilizados pelas atividades desta semana em particular, comtemplando tanto as figuras geométricas como a exploração do espaço. Por essa razão, optamos por discutir especificamente o que está proposto sobre geometria para essa semana de agosto de 2020.

O referido período, apresenta no geral, seis indicações de conhecimentos e saberes relacionadas à geometria: comparação de elementos no espaço; descrição do espaço, de personagens e objetos; percepção visual; identificação de formas e cores; classificação de objetos considerando atributo de cor e forma; representação visual com elementos da história. As tarefas para o desenvolvimento desses aspectos decorrem da **leitura deleite** de dois vídeos, que já mencionamos: “Fui morar numa casinha” e “A casa sonolenta”, como podemos observar na Figura 2.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO | SÃO CRISTÓVÃO PREFEITURA

Diretoria Pedagógica
Planejamento para a execução das Atividades não-presenciais - Semanal
Portaria nº ____/2020/SEMED/SC
Resolução nº 01/2020/CME/SC

ENSINO INFANTIL

PLANEJAMENTO SEMANAL

EMEF:_____ **Acompanhamento da Coordenação:**_____ **MÊS:**_____

SÉRIE/TURMA: _____ **TURNO:**_____ **PROFº.:**_____ **PERÍODO:**_____

	SEGUNDA-FEIRA 24/08/2020	TERÇA-FEIRA 25/08/2020	QUARTA-FEIRA 19/08/2020	QUINTA-FEIRA 20/08/2020	SEXTA-FEIRA 21/08/2020
CAMPOS DE EXPERIÊNCIA	*O Eu, o outro e o nós (EO)* ( ) *Corpo, Gestos e Movimentos (CG)* ( ) Traços, Sons, Cores e Imagens (TS) ( ) *Escuta, Fala, Pensamento e Imaginação (EF)* ( ) Espaço, Tempo, Quantidades, Relações e Transformações (ET) ( )	*O Eu, o outro e o nós (EO)* ( ) *Corpo, Gestos e Movimentos (CG)* ( ) Traços, Sons, Cores e Imagens (TS) ( ) *Escuta, Fala, Pensamento e Imaginação (EF)* ( ) Espaço, Tempo, Quantidades, Relações e Transformações (ET) ( )	*O Eu, o outro e o nós (EO)* ( ) *Corpo, Gestos e Movimentos (CG)* ( ) Traços, Sons, Cores e Imagens (TS) ( ) *Escuta, Fala, Pensamento e Imaginação (EF)* ( ) Espaço, Tempo, Quantidades, Relações e Transformações (ET) ( )	*O Eu, o outro e o nós (EO)* (X) *Corpo, Gestos e Movimentos (CG)* ( ) Traços, Sons, Cores e Imagens (TS) ( ) *Escuta, Fala, Pensamento e Imaginação (EF)* ( ) Espaço, Tempo, Quantidades, Relações e Transformações (ET) ( )	*O Eu, o outro e o nós (EO)* ( ) *Corpo, Gestos e Movimentos (CG)* ( ) Traços, Sons, Cores e Imagens (TS) ( ) *Escuta, Fala, Pensamento e Imaginação (EF)* ( ) Espaço, Tempo, Quantidades, Relações e Transformações (ET) ( )
LEITURA DELEITE	https://www.youtube.com/watch?v=VJQaBK70f24 Música: FUI MORAR NUMA CASINHA-NHÁ	https://www.youtube.com/watch?v=VJQaBK70f24 Música: FUI MORAR NUMA CASINHA-NHÁ	https://www.youtube.com/watch?v=SJO9XWbOolo História LETRA C! Série "Cantar e Escrever"	https://www.youtube.com/watch?v=VJQaBK70f24 Música: FUI MORAR NUMA CASINHA-NHÁ	https://www.youtube.com/watch?v=b6y2pgamhgw A casa sonolenta
CONHECIMENTOS E SABERES:	-Imitação como forma de expressão; -Comparação dos elementos no espaço; -Relato: descrição do espaço, personagens e objetos.	-Registros gráficos: desenhos, letras e números; -Oralização da escrita.	- Registros gráficos: desenhos, letras e sílabas; -Linguagem musical, gestual;	-Percepção visual; -Identificar formas e cores; -Classificar objetos, considerando o atributo cor e forma; -Execução musical (imitação);	-Fortalecimento de vínculo afetivo com a família; -Representação visual com elementos da história;
Atividade do Caderno Travessia	Caderno de atividades da educação infantil de 4 a 5 anos página 41.			Caderno de atividades da educação infantil de 4 a 5 anos página 29.	Caderno de atividades da educação infantil de 4 a 5 anos página 14. Construção de casa de boneca.
Orientações para pais/responsáveis e estudantes	Nossa atividade de hoje: -Ouça, cante, dance e imite os personagens da música "Fui morar numa casinha". -Converse com a criança sobre a sua casa. Assim como a lagartixa, a bruxinha e princesinha, todos tem uma casa. Pergunte a criança se a sua casa e grande ou pequena? Se é de madeira ou tijolinho? Que cor é? Quantas pessoas moram com você?	Nossa atividade de hoje; -Conversar com as crianças sobre a música da casa; -Falar para a criança sobre a letra que começa com a palavra casa. Pergunte a ela se ela conhece, mostre a ela a letra C. Agora vamos brincar, vamos fazer a letrinha C em forma de pista e a criança irá se divertir muito com carrinhos. -Contar e registrar o número de letras da palavra casa.	Nossa atividade de hoje: -Conversar com as crianças sobre a letra C; -Apresentar o vídeo da letra C; -Acompanhar a música da letra C contando e batendo palmas; -Identificar a sílaba inicial das figuras.	Nossa atividade de hoje: -Ouça, cante, dance e imite os personagens da música; -Auxiliar a criança na atividade de recorte, colagem e identificação das formas.	Nossa atividade de hoje: -Assistir com a família a história A Casa Sonolenta; -Construir uma casa de papelão e empilhar os personagens de acordo com a sequência do conto; -Auxiliar a criança na atividade de produção da casa de personagens.
Recursos Complementares	-Borracha, lápis, papel, lápis de cor.	-Tesoura, lápis e cola; -Papel ou papelão; -Canetinha preta ou tinta; -Carrinhos.	-Atividade enviada por meio digital.	-Tesoura e cola. -Lápis para colorir.	-Tesoura, lápis e cola; -Papel ou papelão; -Canetinha preta ou tinta;

São Cristóvão, ___de agosto de 2020

_____ Assinatura do Coordenador Pedagógico

_____ Assinatura do (a) Professor (a)

Figura 2 – Planejamento semanal referente a terceira semana do mês de agosto[2]

Fonte: Planejamento Semanal para Educação Infantil (crianças de 4-5 anos).

2 Há um equívoco nas datas dos dias da semana. Os dias 24/08 e 25/08 referentes à segunda-feira e terça-feira, apresentados na Figura 2, não estão corretos. As datas corrigidas são: 17/08 e 18/08 correspondentes a terceira semana de agosto.

No intuito de apresentar uma análise sucinta a respeito do que esta nesse planejamento, discutimos as orientações indicadas para o primeiro vídeo “ Fui morar numa casinha” (www.youtube.com/watch?v=VJQaBK70f24). Observamos que alguns conceitos geométricos se encontam presentes durante toda a sequência audiovisual. As casas e sua disposição no cenário podem estimular os conceitos de tamanho, proporção, localização, posição, perspectiva. Portanto, é rico em propostas que possibilitem o trabalho com geometria. Indicamos neste texto qual foi o olhar das professoras diante das possibilidades de ensino por intermédio da cantiga popular.

A ferramenta audiovisual foi peça fundamental para a realização das atividades planejadas pelas professoras. Verificamos que, na segunda-feira, após as crianças assistirem ao vídeo, as docentes indicaram uma orientação aos pais com um questionamento inicial relacionado à geometria: *Assim como a lagartixa, a bruxinha e princesinha, todos tem uma casa. Pergunte a criança se a sua casa é grande ou pequena.* Este questionamento fará com que a criança faça uma comparação entre as casas do clipe e a sua própria moradia, relacionando esses objetos entre si e ao espaço em que ocupam. Ressaltamos que há necessidade de deixar bem clara qual é a relação de comparação indicada na pergunta – das casas dos personagens do vídeo e a minha casa. Pois a questão de comparação envolve o seguinte: a minha casa é grande ou pequena em relação a que outra casa ou objeto?

As perguntas sugeridas pelas professoras constituem uma oportunidade de estimular o pensamento matemático das crianças. De acordo com Mendes e Delgado (2008) o educador precisa questionar as crianças e propiciar ambientes de resolução de problemas, instigando as crianças a raciocinar e encontrar uma resposta ou mais respostas. A pergunta acima estimula a comparação entre os tamanhos das casas entre si e com a minha casa, bem como a relação de proporção entre o tamanho dos personagens e suas casas e, ainda, a relação dessas casas com o espaço que ocupam. De acordo com Lorenzato (2006), a introdução prévia destas noções contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico das crianças.

Outra atividade sugerida para o mesmo dia é que as crianças desenhem e pintem a sua própria casa. A atividade na qual a criança desenha a casinha, estimula a utilização das figuras geométricas de forma espontânea, com base no que a criança já tem construído a esse respeito em suas próprias experiências. Entendemos que a geometria se faz presente no desenhar livremente uma casa, que traz não somente a representação das formas geométricas que, geralmente, aparecem no desenho. Envolve também as relações espaciais de dentro e fora, em cima, embaixo, aberto, fechado, junto, separado, de um lado, de outro. São relações que indicam o desenvolvimento de habilidades de orientação espacial e de visualização espacial, próprias do sentido espacial, no campo da geometria (LORENZATO, 2006; MENDES; DELGADO, 2008; ZOGAIB, 2019; 2020).

Por essa razão, pensamos que essa tarefa do desenho da casa pode ser mais

explorada, a partir dos conceitos que mencionamos. Entretanto, para isso, é necessário que o professor tenha conhecimento desses conceitos, o que toca fortemente na questão da formação dos professores que ensinam matemática na educação infantil. (LOPES et al. 2012; MIZUKAMI et al. 2002; PAVANELLO; COSTA, 2019). Reiteramos o que esses autores discutem a respeito da formação docente para o trabalho com a matemática para e com as crianças.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da discussão e interpretação dos resultados encontrados por meio da análise documental dos planejamentos semanais, observamos que as estratégias pensadas pelas educadoras restringem a exploração das atividades à identificação das formas geométricas, o que se articula com suas concepções sobre geometria apontadas em suas falas no questionário que aplicamos durante nossa pesquisa. Além disso, no decorrer da análise, ao realizarmos uma comparação entre as tarefas matemáticas, comprovamos como o ensino do campo numérico prevalece nos planejamentos e, consequentemente, nas práticas pedagógicas dessas professoras que atuam na Educação Infantil. Em seus planos, tornou-se evidente uma desproporção entre o campo aritmético e geométrico, ao confrontarmos os resultados. Esta conduta já constatada por Lorenzato (2006), reafirma como o desenvolvimento matemático das crianças pode se tornar fragilizado, uma vez que o trabalho com geometria na infância favorece a aprendizagem matemática e minimiza o surgimento de dificuldades no percurso escolar (MENDES; DELGADO, 2008).

Ressaltamos que o estudo de autores que abordam teorias e práticas educativas para o trabalho com matemática/geometria na infância foi fundamental para refletirmos sobre sua importância para a vida presente e futura das crianças. As leituras proporcionaram-nos uma percepção diferente sobre a prática, vista muitas vezes como uma mera transmissão do conteúdo matemático de modo mecânico e repetitivo. Entretanto, o trabalho docente vai muito além dessa perspectiva obsoleta; precisa ser pautado no acolhimento e na ampliação de experiências que desenvolvam o pensamento matemático das crianças. Referimo-nos, em especial, ao ensino de geometria, que ainda é pouco compreendido e trabalhado no âmbito educacional. Desse modo, há que se ampliar as pesquisas, as discussões e reflexões, os planos e ações dos professsores de educação infantil, levando em consideração uma intencionalidade pedagógica, para que assim, possamos contribuir para a construção do pensamento geométrico junto com as crianças.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, A. M. L. de.; ZOGAIB, S. D..; VIANA, S. M. de A. Literatura Infantil e resolução de problemas: diálogos e práticas na formação inicial de professores da infância. *In*: 7º Seminário dos Grupos de Pesquisas sobre Crianças e Infâncias, **Anais...,** Natal, RN, p. 2 – 23, jun./jul. 2021. Disponível em: https://grupeci.com. Acesso em: 18 jul. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2017.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal Mathematical of Teacher Education***,* n. 14, p. 133-148, 2011.

CLEMENTS, D. H. Geometric and spatial thinking in early childhood education. In: CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J.; DIBIASE, A. (Eds.). **Engaging young children in mathematics:** Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2004. p. 267 – 298.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J.; SWAMINATHAN, S.; WEBER, D.; TRAWICK-SMITH, C. Teaching and learning Geometry: early foundations. **Quadrante***,* v. 27, n. 2, p. 7-31, 2018.

LIMA JUNIOR, E. B. et al. Análise documental como percurso metodológico na pesquisa qualitativa. **Fucamp**, v. 20, n. 44, p. 36-51, 2021.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e Percepção Matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, M. A; LAKATOS, E. M**. Fundamentos de Metodologia Científica**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2005.

MENDES, M. F; DELGADO, C. C. **Geometria**: textos de apoio para educadores de infância. Lisboa: Ministério da Educação, 2008.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar**: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Autêntica: Belo Horizonte, 2010.

MUNIZ, C. Papéis do brincar e do jogar na Alfabetização Matemática**.** In: **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Apresentação / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

SERGIPE. Secretaria de Estado e da Educação de Sergipe. **Currículo de Sergipe – Educação Infantil e Ensino Fundamental.** Aracaju, SE: SEED, 2018.

SMOLE, K. C. S. **A matemática na educação infantil***:* a teoria as inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artmed, 2003.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. **Figuras e formas**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2003. (Coleção Matemática de 0 a 6).

SOUZA, J. de S.; KANTORSKI, L. P; LUIS, M. A. V. Análise documental e observação participante na pesquisa em saúde mental**. Revista Baiana de Enfermagem**: Salvador, v. 25, n. 2, p. 221-228, maio/ago. 2011.

ZOGAIB, S. D. Um passeio pela escola e a geometria das crianças na educação infantil. **Vidya**, v. 40, n. 2, p. 87-106, jul./dez., 2020

ZOGAIB, S. D. **Sentido espacial de crianças na educação infantil***:* entre mapas, gestos e falas. 2019. 241 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação/PPGE, 2019.

ZOGAIB, S. D.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Geometria, sentido espacial e educação infantil: procurando o Sr. Tesouro. In: COSTA, J. C.; OLIVEIRA, Q. C.; LÍRIO, V. S. **Práticas pedagógicas na educação infantil:** interlocuções, desafios e percursos. Curitiba, PR: Bagai, 2021. p. 147-162.

CAPÍTULO 14

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA: TRABALHANDO CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 04/02/2022

Cristiano Santana Freitas
Egresso da Universidade de Pernambuco - UPE
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/4558781252305067

Lucília Batista Dantas Pereira
UPE- Universidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/7751208084431086

RESUMO: O objetivo desse trabalho é verificar se a resolução de problemas é uma eficiente estratégia didática para a aprendizagem de conceitos de geometria plana no segundo ano do Ensino Médio. Para a obtenção dos dados, foi realizada uma pesquisa de campo de natureza qualitativa e descritiva, com 31 alunos de duas turmas do segundo ano de uma escola pública de Juazeiro-BA. Para a realização dessa pesquisa, inicialmente, foi aplicado um teste de sondagem para os alunos, posteriormente foi realizada em sala, a correção do teste de sondagem utilizando a Resolução de Problemas voltada para conceitos de geometria plana e, por fim, foi aplicado um teste de verificação com os alunos. Os dados obtidos mostraram que a aplicação da Resolução de Problemas favoreceu a melhoria dos resultados dos alunos no teste de verificação, assim como pôde ser observada, em uma parcela dos sujeitos da pesquisa, a compreensão de conceitos no momento dedicado à correção do teste de sondagem**.**

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Plana; Resolução de Problemas; Ensino Médio.

PROBLEM SOLVING AS A METHODOLOGY FOR TEACHING PLAN GEOMETRY: WORKING AREA AND PERIMETER CONCEPTS

ABSTRACT: The objective of this work is to verify if problem solving is an efficient didactic strategy for the learning of plane geometry concepts in the second year of high school. To obtain the data, a qualitative and descriptive field research was carried out, with 31 students from two classes of the second year of a public school in Juazeiro-BA. To carry out this research, initially, a probing test was applied to the students, later, it was carried out in the classroom, the correction of the probing test using problem solving focused on concepts of plane geometry and, finally, a test of verification with students was applied. The data obtained showed that the application of problem solving favored the improvement of the students' results in the verification test, as well as, it could be observed that, in a portion of the research subjects, the understanding of concepts at the time dedicated to the correction of the test.

KEYWORDS: Plane Geometry; Problem Solving; High School.

1 I INTRODUÇÃO

É comum que nas escolas existam diversos questionamentos a respeito do ensino

e da aprendizagem da Matemática. Alunos chamam a atenção com perguntas como, por que devo estudar esse assunto? Ou por que os professores passam tantos exercícios? Por outro lado, os professores questionam a razão pela qual os alunos se mostram tão desinteressados pelos assuntos e pela disciplina de Matemática, de um modo geral.

Realmente há desinteresse, o que, para os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), é considerado uma deficiência no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, há outras causas para que alunos finalizem a educação básica sem ter aprendido diversos conceitos. Pode-se considerar que, muitas vezes, conteúdos importantes da Matemática são deixados de lado, dentre eles, os que envolvem conceitos geométricos. Lorenzato (1995, p.3) confirma isso quando diz que "o ensino da geometria, se comparado com o ensino de outras partes da matemática, tem sido o mais desvairador" e que "no Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula."

O grande problema da ausência citada são as lacunas que aparecem no processo de desenvolvimento intelectual do estudante. De fato, a aprendizagem da geometria exerce um importante papel nas escolas, por meio dela, os alunos têm a possibilidade de se deparar com situações práticas. Sobre isso, Lorenzato (1995, p. 5) afirma que o estudo da geometria é essencial para que as pessoas desenvolvam o pensar geométrico e o raciocínio visual e que, sem este, elas não conseguirão resolver problemas cotidianos que tiverem aspectos geométricos. Além disso, não poderão utilizar a geometria como fator facilitador para a compreensão e a resolução de questões de outras áreas do conhecimento.

Desta forma, fica notória a importância de que o ensino da geometria tem para o desenvolvimento do educando ~~e~~ a responsabilidade que o educador tem em promovê-lo, o que dialoga com o problema citado anteriormente: como superar a falta de interesse nos conteúdos de Matemática e, em especial, os de cunho geométrico?

É evidente que o interesse do aluno por qualquer disciplina depende, em grande parte, da metodologia adotada pelo professor. Por isso, este deve buscar formas de chamar a atenção do aluno para a importância dos conteúdos propostos, fazendo-o ver que há aplicação prática naquilo que está sendo estudado. Sobre isso, Smole e Centurión (1992, p.9) afirmam:

> É, pois, fundamental que o estudo da Matemática seja calcado em situações-problema que possibilitem a participação ativa na construção do conhecimento matemático. O aluno desenvolve seu raciocínio participando de atividades, agindo e refletindo sobre a realidade que o cerca, fazendo uso das informações de que dispõe. Se quisermos melhorar o presente estado de conhecimento, devemos nos questionar sobre como pode, de fato o nosso aluno desenvolver o pensamento crítico ou raciocínio lógico.

Assim, surge o seguinte questionamento: o uso da resolução de problemas em sala de aula facilita a aprendizagem de conceitos de geometria plana, mais especificamente relacionados à área e ao perímetro, no segundo ano do ensino médio?

Na tentativa de responder a tal questionamento, este trabalho tem como objetivo

geral verificar se a resolução de problemas é uma eficiente estratégia didática para a aprendizagem de conceitos de geometria plana no segundo ano do ensino médio. Tendo como objetivos específicos: identificar se o professor faz uso de problemas ao ensinar geometria plana em sala de aula; averiguar se o professor diferencia exercícios de problemas e analisar os resultados apresentados pelos alunos ao resolverem problemas.

2 | RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Matemática e a Resolução de Problemas estão ligadas historicamente de tal forma que não é possível pensar nesta, sem que aquela seja lembrada. Os PCN (BRASIL, 1998) ressaltam que a Matemática foi construída para dar respostas às questões das mais diversas origens e contextos, sejam elas de origem prática, quando, por exemplo, a resposta ao problema otimiza o dia a dia nas atividades humanas, podem também ser questões que se relacionam a outras ciências e até mesmo às que surgem e investigam a própria Matemática, enriquecendo-a.

Onuchic (1999) destaca a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino da Matemática, para a autora, por meio dessa abordagem, o aluno consegue aprender Matemática resolvendo problemas, ao mesmo tempo em que aprende Matemática para resolver problemas. Essa afirmação é complementada quando ela afirma que "ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também como um primeiro passo para se fazer isso" (p. 207).

Assim, o professor que usa problemas somente com o intuito de que os alunos encontrem resultados, trabalhando com eles apenas fórmulas e conceitos estudados anteriormente, deixa de usar os problemas em sua amplitude de potencialidade, pois, como afirma Polya (1995, p.V),

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolha o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Nesse contexto, pode-se observar a Resolução de Problemas como fator motivador para o aluno, uma vez que o tira da condição de ouvinte, tornando-o participante da construção do seu próprio conhecimento. Sobre isso, os PCN (BRASIL, 1998, p. 40) afirmam que "o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução."

Smole e Centurión (1992, p.9) também afirmam a importância da participação do

aluno no processo de aprendizagem, e como os problemas podem auxiliar nisso, quando pontuam que

> É, pois, fundamental que o estudo da Matemática seja calcado em situações-problema que possibilitem a participação ativa na construção do conhecimento matemático. O aluno desenvolve seu raciocínio participando de atividades, agindo e refletindo sobre a realidade que o cerca, fazendo uso das informações de que dispõe.

Dessa forma, fica notória como a metodologia Resolução de Problemas pode ser útil para o ensino da Matemática, entretanto, para que este método didático tenha eficiência, o professor deve estar ciente de quando um enunciado se trata de um problema, e quando ele é, na realidade, um exercício.

2.1 Diferença entre problemas e exercícios

Para Onuchic (1999), os problemas não têm sido usados do modo mais adequado, uma vez que são utilizados somente como forma de aplicação de conhecimentos pré-adquiridos pelos alunos. Polya (1995, p. 124) denomina esse tipo de problema como problema rotineiro. Para ele, "de modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido".

Já Dante (2007, p. 43) usa um termo mais atual para classificar esse tipo de situação ao denominá-lo como exercício. Para ele, "exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas". Por outro lado, Dante (2007, p. 43) afirma que problema

> [...] é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução. A resolução de um problema-processo exige uma certa dose de iniciativa, e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Dessa forma, pode-se entender um problema como uma situação em que o indivíduo não tenha uma forma imediata de dar resposta à questão, mas sim, que ele precise usar sua criatividade aliada a conhecimentos pré-adquiridos. Esses problemas deverão ser desafiadores, precisam despertar o interesse do aluno e, certamente, eles terão, e deverão ter, dificuldades. É nesse momento que o professor deve intervir, dando-lhes auxílios, porém deixando, ainda assim, muito a ser feito. Para Polya (1995, p. 1)

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.

Para facilitar esse auxílio, Polya (1995) desenvolveu um método para resolução de

problemas, no qual existe uma sequência que pode ser seguida e que ajudará bastante: primeiramente, aquele que deseja resolver um problema deve compreendê-lo, em seguida, traçar o plano que será usado. Após isso, deve-se executar o plano e, por fim, verificar o resultado. Para o autor, a grande maioria dos problemas pode ser resolvido se esses quatro passos forem seguidos. A seguir, são descritos cada um desses passos.

Compressão do problema: para Polya (1995), o aluno deve compreender aquilo que o enunciado diz, não devendo ficar margem para interpretação equivocada da língua. Ele deve também identificar as partes principais do problema. Para auxiliar nisso, o professor pode questionar seu aluno perguntando "qual é a incógnita?", "Quais são os dados?", "Qual é a condicionante?", "É possível satisfazer a condicionante?". Para facilitar essa compreensão o aluno pode também usar, quando o problema permitir, figuras e relacioná-las aos dados do enunciado.

Estabelecimento de um plano: Polya (1995) considera que há um plano de resolução de um problema quando se sabe quais passos devem ser tomados para se chegar à incógnita, ou seja, quais cálculos precisam ser resolvidos ou desenhos precisam ser feitos. Entretanto, nem sempre é fácil para o aluno ter uma ideia que seja apropriada, pois, "realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano" (POLYA, 1995).

Assim, é tarefa do professor ajudar, sutilmente, o aluno. O professor pode iniciar essa etapa perguntando se ele conhece um problema parecido com o que está a buscar a resposta. É possível utilizá-lo? É possível reformular o problema? Utilizou todos os dados? Utilizou a condicionante? Por isso, Polya (1995) considera que para resolver um problema o aluno precisa de conhecimento prévio.

Execução do plano: essa etapa é relativamente mais fácil. Uma vez que já se tem um plano traçado basta, então, colocá-lo em prática. Para Polya (1995), superada a dificuldade da etapa anterior, o que mais se precisa agora é de paciência. Entretanto, ainda existe a possibilidade de que o aluno acabe por esquecer qual seu plano, Polya (1995, p. 9) afirma que isso pode acontecer quando o aluno não usou seu próprio raciocínio para conceber esse plano, tendo, na realidade, apenas concordado com uma sugestão. Assim,

> [...] se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo.

Portanto, mesmo com um plano traçado, não há garantia de que ele vá levar a resposta que se deseja. O aluno deve verificar se cada passo adotado na resolução realmente está correto. Não é difícil encontrar resoluções em que o aluno "inventa" um passo, fazendo-o chegar a um resultado incorreto.

Retrospecto: Chegar a um resultado não significa que ele esteja correto, mesmo que se tenha seguido os passos cuidadosamente, por isso é importante que o estudante faça uma verificação. Para Dante (2007, p. 28), esse momento é de grande importância, pois

> Nesta etapa, analisamos a solução obtida e fazemos a verificação do resultado. O retrospecto, repassando todo o problema, faz com que o aluno reveja como pensou inicialmente, como encaminhou uma estratégia de solução, como efetuou os cálculos, enfim, todo o caminho trilhado para obter a solução. Esse processo cuidadoso é um excelente exercício de aprendizagem e serve também para detectar e corrigir possíveis enganos.

Apesar do exposto, não são raras as vezes em que esse retrospecto é deixado de lado. Polya (1995) destaca que mesmo alunos mais dedicados acabam deixando de rever a resposta, bem como todo o caminho que os levou a resolução da questão, pois se sentem satisfeitos com o resultado encontrado e, dessa forma, perdem a oportunidade de consolidar o conhecimento recém obtido e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas. Para estimular essa verificação, o professor pode fazer aos alunos questionamentos como: "é possível verificar o resultado, é possível verificar o argumento?", ou ainda "é possível chegar ao resultado por um caminho diferente?" (Polya, 1995).

3 | O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA

A geometria faz parte do contexto humano há milhares de anos. Embora não se tenha certeza do momento exato em que os conhecimentos geométricos se originaram, acredita-se que tenham surgido devido às observações que o homem da antiguidade fazia do mundo ao seu redor. Com o passar do tempo, eles tornaram-se capazes de reconhecer configurações físicas e comparar tamanhos e formas. Mais tarde, a partir do acúmulo dessas observações, a inteligência humana foi capaz de perceber que de figuras físicas podiam ser extraídas propriedades e, desta forma, problemas relacionados a um certo conjunto dessas figuras podiam ser resolvidas usando o mesmo método: é o que Eves (1992, p.3) denomina como "geometria cientifica".

Muitas são as razões para se ensinar geometria nas escolas, Lorenzato (1995, p.6) destaca que quem busca um facilitador de processos mentais, encontrará na geometria aquilo que precisa, pois sua aprendizagem prestigia o processo de construção do conhecimento, valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar. Nessa mesma linha, Pavanello (1993) evidencia a importância do trabalho geométrico ao compará-lo com o algébrico: o trabalho focado na álgebra pode conduzir à execução mecânica de operações, uma vez que suas transformações são determinadas por leis que indicam aquilo que pode ser feito em situações específicas, enquanto o trabalho geométrico possibilita o raciocínio lógico-dedutivo, pois "pode favorecer a análise de fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, a partir daí, de novos fatos e novas relações" (PAVANELLO,

1993, p. 16).

O exposto acima não deixa dúvidas de que pode haver inúmeros benefícios mentais ao educando que aprende geometria e muitos são os textos que orientam seu ensino. Um desses textos são os Parâmetros Curriculares da Bahia (PCB), neles, encontram-se as diretrizes da disciplina de Matemática a serem seguidas pelos docentes da rede do referido Estado. Os PCB (BAHIA, 2015, p.12) apresentam, por meio de quatro eixos integradores, as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes.

Estes eixos são: Linguagem, Estruturas e Abstrações Matemáticas; Tratamento da Informação e Probabilidades; Conexões entre Saberes: estudo de modelos, levantamento de estratégias e resolução de problemas; Modelagem Geométrica no Plano e no Espaço. Sobre este último eixo, destacam (BAHIA, 2015, p. 13) que tem por finalidade apontar "as competências geométricas e trigonométricas que envolvem conceitos, como: o Teorema de Tales, a semelhança de figuras e o teorema de Pitágoras [...]". Afirmam ainda que o eixo visa que o aluno se aproprie do conhecimento geométrico e possa, assim, ler, representar e agir sobre a realidade. Dessa forma, o aprendizado que o aluno tem sobre geometria não fica restrito ao campo imaginário e hipotético, pelo contrário, faz parte do mundo em que ele pode ver e tocar.

Entretanto, muitas vezes seu ensino é deixado de lado. Lorenzato (1995) destaca dois fatores que contribuem fortemente para essa realidade: o primeiro é que muitos professores não possuem os conhecimentos necessários para ensinar seus conteúdos, o que ocorre devido à frágil posição da geometria nos cursos de formação, em todos os seus níveis, pois, se ele não aprendeu, não há como ensinar. O segundo motivo é a exagerada importância que é dada aos livros didáticos quando, muitas vezes, estes não têm qualidade suficiente para justificar a importância citada. Lorenzato (1995, p. 4) fundamenta isso, no mesmo parágrafo, quando questiona:

> E como a Geometria neles aparece? Infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico.

O autor cita um fator bastante interessante para o ensino de qualquer conteúdo de Matemática, que é sua aplicação em um contexto lógico. De fato, a aprendizagem da geometria é capaz de dar para o aluno ferramentas úteis ao seu cotidiano. Nessa linha, Flemming, Luz e Mello (2005 p. 84) afirmam que "na geometria vamos encontrar conceitos facilitadores para o entendimento de vários problemas do nosso dia a dia. Não podemos esquecer que o nosso mundo é essencialmente geométrico".

Assim, os alunos veem mais sentido em estudar conteúdos quando eles enxergam uma aplicação no seu cotidiano, assim, a geometria se apresenta como importante meio para isso, uma vez que não é difícil encontrar problemas geométricos de ordem prática.

3.1 Resolução de problemas e geometria plana

Há diversos caminhos para se ensinar geometria, prova disso são as tendências da educação matemática citadas anteriormente e, tendo em vista à grande possibilidade de gerar situações-problema de ordem prática, cabe destacar que a tendência Resolução de Problemas pode ser um meio eficaz para o seu ensino.

Na sala de aula, o professor que deseja ensinar geometria deve escolher as situações-problema que estão de acordo com o nível de conhecimento de seus alunos. Além disso, segundo Lorenzato (1995, p. 11),

> Além de dispor de bons materiais e saber usá-los corretamente, é preciso que em sala de aula, o professor assuma a postura de orientador para a aprendizagem: assim, ele não responderá ao aluno, mas o conduzirá à descoberta. A fim de facilitar essa tarefa, seguem algumas questões que deveriam estar sempre presentes as aulas, principalmente nas de Geometria:
>
> Por que você pensa assim? Como você chegou a essa conclusão? Isso vale para outros casos? Como isso pode ser dito de outro modo? É possível representar essa situação? O que isto quer dizer? Por que você concorda?
>
> Existem outras possibilidades? O que mudou? Como isto é possível?

Dessa forma, pode notar o quanto os questionamentos sugeridos por Polya (1995) nos quatros passos para Resolução de problemas se mostram importantes ao resolver problemas geométricos. Além disso, os PCB (2015) afirmam que a Resolução de Problemas, como metodologia, faz-se necessária no desenvolvimento de todos os eixos integradores, devendo, o professor, propor diferentes tipos e destacar suas características nos processos de ensino e de aprendizagem. Assim, fica justificada a possibilidade de ensinar geometria por meio da metodologia Resolução de Problemas.

4 I METODOLOGIA

Para este estudo, foi realizada uma pesquisa de campo de cunho qualitativo e descritivo, buscando avaliar a Resolução de Problemas como ferramenta didática. De acordo com Marconi e Lakatos (2017, p. 203), a pesquisa de campo “consiste na observação de fatos e fenômenos tal como ocorrem espontaneamente, na coleta de dados a eles referentes e no registro de variáveis que se presume relevantes para analisá-los”. Para Gil (2008), os procedimentos mais indicados para a análise desse tipo de pesquisa são os de natureza qualitativa e, Para Bauer e Gaskell (2002, p. 57),

> o principal interesse dos pesquisadores qualitativos é na tipificação da variedade de representações das pessoas no seu mundo vivencial. As maneiras como as pessoas se relacionam com os objetos no seu mundo vivencial, sua relação sujeito-objeto, e observada através de conceitos tais como opiniões, atitudes, sentimentos, explicações, estereótipos, crenças, identidades, ideologias, discurso, cosmovisões, hábitos e práticas.

Os dados da pesquisa de campo foram coletados em uma Escola da rede estadual de ensino, localizada em Juazeiro, Bahia. Os sujeitos investigados foram 13 alunos de uma turma e 18 de outra, ambas do segundo ano do ensino médio e com aulas nos turnos matutino e vespertino. Foi investigado também o professor que ministra aulas de Matemática nas referidas turmas.

Para coletar os dados, foram utilizadas 6 aulas de 50 minutos em cada turma. Os encontros ficaram divididos em 3 momentos, organizados da seguinte forma: no primeiro momento, foi utilizada 1 aula para aplicação de um teste de sondagem aos alunos.

No segundo momento, foram destinadas 4 aulas para a correção do teste de sondagem abordando as etapas da Resolução de Problemas, recomendadas por Polya (1995). Já no terceiro momento, utilizou-se mais 1 aula para aplicação de um teste de verificação aos alunos.

Em todos os momentos, as atitudes e os questionamentos dos alunos foram observados. Todo o material foi recolhido pelo pesquisador e as informações organizadas e ordenadas para devida análise, desenvolvimento e exposição das ideias e fatos constatados.

5 I ANÁLISES DOS RESULTADOS

5.1 Análises do teste de sondagem aplicado com os alunos

Com relação ao teste de sondagem aplicado aos alunos, foi observada uma inquietação, pois muitos se queixaram do nível das questões a serem respondidas. Em ambas as turmas houve comentários do tipo “se eu conseguir fazer uma, ficarei feliz” e “Professor, está muito difícil”. Entretanto, muitos se mantiveram focados em busca da solução dos problemas.

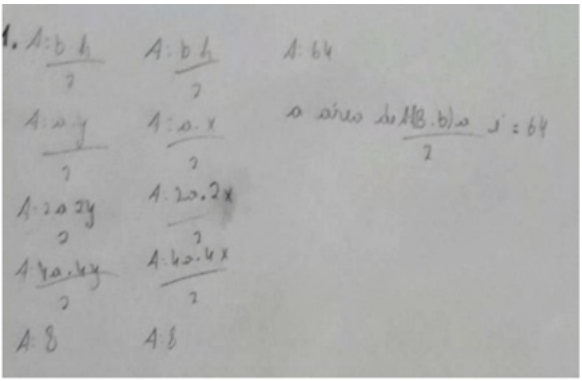


Figura 1- Resolução de aluno de T2 para o problema 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

Serão expostos os dados das duas turmas e estas serão denominadas por T1, para a turma 1, e T2, para a turma 2. Na primeira questão, que se trata de um problema de demonstração, nenhum dos alunos das duas turmas conseguiu iniciar algo que tivesse coerência com o que se pedia ou que pudesse levar a sua resolução, como mostra a figura 1, um aluno tenta usar números em problema exclusivamente algébrico.

Já na segunda questão, dois alunos, um de cada turma, deram a resposta correta. Entretanto, nenhum deles mostrou cálculos que pudessem evidenciar o caminho usado para obtê-la e um aluno de T1 conseguiu interpretar o problema corretamente e resolver todos os passos corretamente, faltando somente resolver a equação do segundo grau, como mostra a Figura 2.

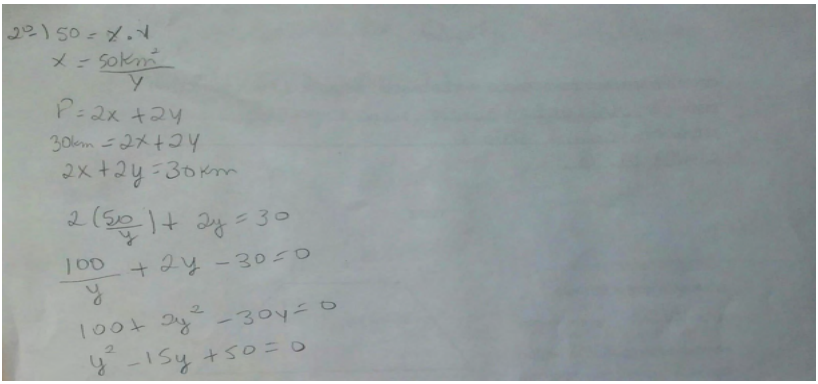


Figura 2- Resolução de aluno de T1 para questão 2.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na terceira questão, um aluno de T1 conseguiu resolver todos os passos e chegar na resposta correta. Já em T2 nenhum aluno acertou, entretanto dois alunos desta turma conseguiram iniciar a resolução, mas cometeram, entre outros erros, o de multiplicar grandezas que estavam em unidades de medida diferentes, conforme pode ser visto na figura 3. Os demais alunos forneceram respostas incorretas, em que os cálculos apresentados continham informações que não constavam no enunciado, e outros alunos deixaram a questão em branco.

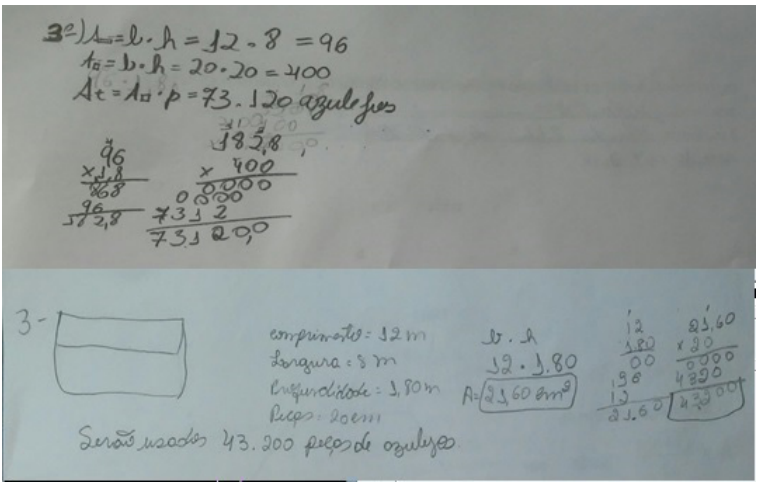


Figura -3- Resoluções de alunos de T2 para a questão 3.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na quarta e na quinta questões foram observadas, em ambas as turmas, somente respostas em branco ou resoluções sem relação com o que o enunciado pedia ou com suas informações. É provável que isso tenha ocorrido devido ao fato de estas questões exigirem muito da interpretação textual, visto que não havia figuras que ilustrassem as situações.

5.2 Relato da correção do teste de sondagem, abordando as etapas da resolução de problemas

Essa fase foi iniciada resolvendo com os alunos a primeira questão do teste de sondagem e correspondeu ao segundo encontro. Primeiramente, foi copiada a questão no quadro negro, tal como ela estava no teste de sondagem, e lida em voz alta. Segue o diálogo abaixo:

- Pesquisador: *Então, o que a questão quer de nós?*

Houve silêncio em ambas as turmas, assim, foi lido novamente o enunciado com ênfase ao seu início, que dizia “mostre que...”. Em T2 o silêncio persistiu, então foi necessário que se explicasse o que se pedia. Já em T1, um aluno se manifestou:

- Aluno: *Professor, acho que quer que mostremos como se chega naquela fórmula.*

- Pesquisador: *Todos concordam com o colega ou alguém tem outra interpretação ao enunciado?*

Muitos se mantiveram em silêncio, entretanto, outros disseram que era isso mesmo que deveria ser feito, então foi dado continuidade. O diálogo seguinte para ambas as turmas segue abaixo:

- Pesquisador: *já sabemos, então, onde queremos chegar, precisamos agora saber como fazer isso. Sugestões?*

Novamente houve silêncio nas duas turmas e mais uma vez o pesquisador interveio:

- Pesquisador: *bem, o enunciado quer que a fórmula seja demonstrada decompondo o trapézio. Observando a figura, como podemos decompô-lo, ou melhor dizendo, separá-lo?*

Alunos de T1 e T2 disseram que poderiam decompor em dois triângulos e um quadrado.

- Pesquisador: *Muito bem! E agora, como podemos usar essas informações para chegar onde queremos?*

Novamente houve silêncio até que novamente o pesquisador interveio:

- Pesquisador: *do enunciado sabemos que precisamos separar a área desse trapézio, criando outras figuras, que já são conhecidas. Vocês foram bem e conseguiram ver um quadrado e dois triângulos. Se calcularmos as áreas de cada uma das figuras e depois somarmos, a soma será igual a área do trapézio. Correto?*

- Aluno: *sim, professor, com certeza!*

Nesse momento, os alunos já tinham entendido o enunciado e tinham um plano para resolvê-lo. Assim, faltava a execução do plano e, ao fim, a verificação dos passos tomados, conforme recomenda Polya (1995). Durante a execução do plano, alguns alunos tiveram dificuldades para entender alguns passos. Por exemplo, não sabiam colocar todas as incógnitas em um mesmo denominador. Além disso, no decorrer da resolução ficou evidente que muitos alunos, na realidade, ainda estavam com dificuldade no entendimento do próprio enunciado. Provavelmente isso tenha ocorrido devido ao fato de o enunciado se tratar de um problema de demonstração, que muitas vezes não recebe a mesma importância que os problemas mais habituais. Para Polya (1995) problemas desse tipo recebem mais atenção na matemática superior.

No terceiro encontro, devido a pedidos de alguns alunos, optou-se por resolver com os mesmos a questão de número 3, deixando a 2 para um momento posterior. Novamente, o enunciado foi transcrito no quadro negro e feita para ambas as turmas a seguinte pergunta:

- Pesquisador: *Então, o que o enunciado deseja de nós?*

Não demorou em nenhuma das turmas para que alunos respondessem:

- Aluno: *A questão quer saber quantos azulejos precisam para cobrir a piscina*.

- Pesquisador: *Certo. Temos informações suficientes para encontrar a resposta?*

Em T1 a resposta veio logo, com os alunos afirmando que sim, já em T2 houve silêncio. Então, para facilitar o entendimento, foi desenhada no quadro negro a figura e, para ajudar na visualização, a sala de aula foi usada como referência, uma vez que tem formas parecidas a de um paralelepípedo. A figura e o exemplo também foram dados em T1. Nesse momento, com todos os dados do enunciado colocados no desenho que representavam a figura, mais alunos de T1 concordaram que os dados eram suficientes, ao passo que em T2 surgiram os primeiros alunos concordando com essa afirmação. Então, veio o segundo questionamento aos alunos:

- Pesquisador: *Como podemos, agora, dar a resposta?*

Em T1, um aluno prontamente respondeu que bastava calcular a área total a ser coberta por azulejos e depois dividir pela área de um único azulejo, alguns colegas concordaram com sua resposta. Já em T2, foi necessário explicar aos alunos esse procedimento, mostrando, inclusive, os azulejos que continham na sala. Nas duas turmas esse procedimento foi transcrito no quadro negro.

Em T1, os próprios alunos foram calculando, um a um, os retângulos que compunham a piscina e o pesquisador somente anotava no quadro as informações. Em T2, foi necessário um maior acompanhamento, pedindo para que os alunos dissessem quais dados deveriam ser usados para o cálculo das áreas de cada um dos retângulos. Ao final, já com a área total, perguntou-se:

- Pesquisador: *E agora?*

Em T2, houve silêncio por um tempo, mas um aluno citou o passo anotado no quadro negro, dizendo que teria que dividir a área total pela área do azulejo. Em T1, essa resposta veio imediatamente, porém alguns colegas interromperam:

- Aluno: *também temos que converter a área do azulejo, pois suas dimensões estão em unidades de centímetro, o que resultaria em centímetros quadrados, enquanto a área encontrada para a superfície da piscina está em unidades de metro.*

- Pesquisador: *Muito bem! Todos concordam?*

Ao que a maioria se manifestou positivamente. Então, a conversão foi feita e o enunciado finalizado sem maiores dificuldades em T1. Em T2, não houve esse questionamento, então a questão foi resolvida sem levar em consideração as unidades diferentes, chegando a um resultado totalmente incoerente com a lógica do enunciado, então rapidamente alguns alunos se manifestaram, dizendo:

- Aluno: *Professor, está errado, n*ão tem como a resposta ser 0,42.

De fato, nesse caso a resposta estava errada, não sendo preciso convencer os alunos da necessidade de um retrospecto, conforme recomendado por Polya (1995). Então, foi revisto com os alunos todos os passos, desde sua interpretação, e logo foi encontrado o erro e sua correção realizada. Em T1, os alunos foram questionados se teriam como saber se a resposta estava correta, muitos disseram que estava, pois eles tinham seguido passo a passo o plano de resolução. Mesmo assim, foram alertados da necessidade de fazer uma verificação e, mesmo impacientes, eles concordaram.

É importante ressaltar o fato de que em T1 somente um aluno conseguiu resolver esse problema durante o teste de sondagem, enquanto na discussão do problema muitos se manifestaram e demonstraram não ter dificuldade de entender os passos seguidos, isso quando eles mesmos não faziam a sugestão desses passos.

5.3 Análises do teste de verificação aplicado com os alunos

O teste de verificação trouxe um número expressivo de acertos se comparado

aos resultados do primeiro teste, essa realidade foi observada em ambas as turmas. Na primeira questão, 8 alunos de T1 chegaram à resposta correta, 4 não conseguiram iniciar sua resolução e 1 substituiu os dados em uma fórmula de modo adequado, mas errou no desenvolvimento e na resolução de outra parte do enunciado, como mostra a figura 4.

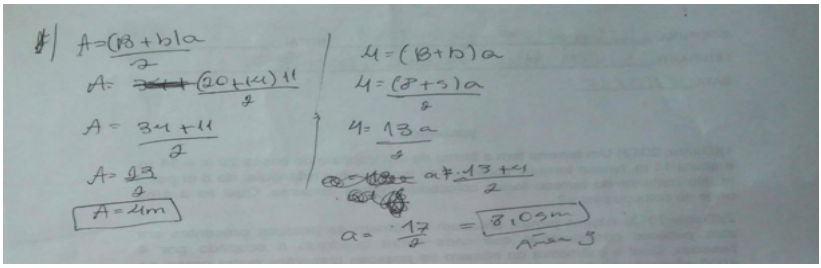


Figura 4- Resolução de aluno de T1 para o problema 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em T2, na primeira questão, a turma obteve um total de 3 acertos, também foram 3 os alunos que não conseguiram iniciar a resolução da questão, 2 alunos apresentaram resoluções em que os dados foram utilizados aleatoriamente. Em uma dessas resoluções, um aluno usa um dado do enunciado para dividir um número que ele encontrou, quando, na realidade, esse dado serviria para calcular uma área. Como se pode ver na figura 5.

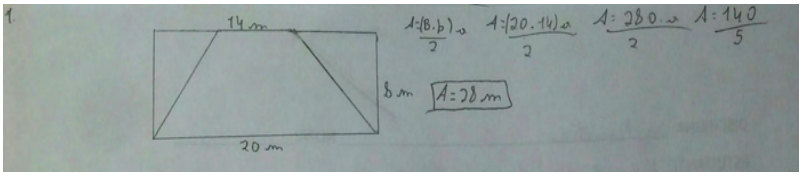


Figura 5 - Resolução de aluno de T2 para o problema 1.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os outros 6 alunos iniciaram a resolução, mas não chegaram ao resultado correto. Isso aconteceu devido a erros de operação, quando o aluno aplicava a fórmula corretamente, mas não seguia os passos adequados para chegar à resposta, também houve casos que a fórmula foi usada de forma equivocada e, quando a fórmula foi usada da forma correta, o aluno não soube dar continuidade à resolução.

Na segunda questão, 8 alunos de T1 chegaram à resposta correta e 5 não iniciaram sua resolução. Já em T2, 11 alunos acertaram, 5 deixaram em branco e 2 não escreveram dados que pudessem levar à resposta. Na terceira questão, 6 alunos de T1 conseguiram responder corretamente, 2 deixaram em branco, 2 usaram dados sem relação com o enunciado e 3 respostas foram descartadas por haver indício de cópia. Em T2, foram 4

acertos, 4 respostas em branco e 10 resoluções incorretas, sendo que o principal erro foi não aplicar a fórmula corretamente, como pode ser visto na figura 6. Há também indício de que outra causa para o não acerto tenha sido o fato de alguns alunos não terem entendido parte do enunciado.

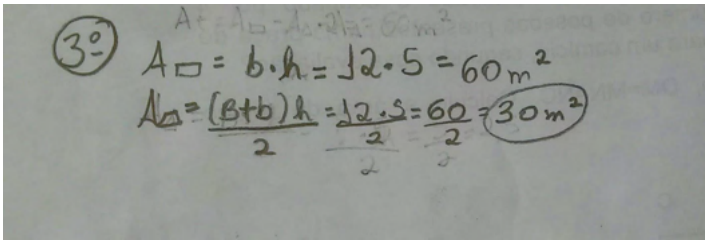


Figura 6- Resolução de aluno de T2 para o problema 3.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a quarta questão, em T1, 3 alunos acertaram, 2 alunos não iniciaram sua resolução, 6 alunos usaram dados incompatíveis com os contidos no enunciado, 2 deram a resposta correta, apesar disso, os cálculos apresentados estavam incorretos. Além disso, essas duas resoluções estavam idênticas, aparentando ter havido cópia.

Em T2, somente 1 resposta foi considerada certa, ainda que mais 3 alunos tenham dado a mesma resposta, as respectivas resoluções aparentavam ter sido copiadas. Nessa turma, outros 9 não iniciaram e 5 começaram a resolver, porém não chegaram ao resultado correto, sendo que alguns usaram dados incompatíveis com os do enunciado, enquanto outros aplicaram a fórmula incorretamente. Pôde-se observar que, nesse caso, os alunos abriram mão de fazer o retrospecto, pois, como citado anteriormente, esse processo ajuda o aluno a rever todo o caminho que o levou à resposta, auxiliando-o a encontrar possíveis erros existentes no decorrer de sua resolução (DANTE, 2007).

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, investigou-se a Resolução de Problemas como fator facilitador para o ensino de conceitos da Geometria Plana, mais especificamente em duas turmas do segundo ano do ensino médio.

Para tanto, foram pesquisados os alunos e analisado como eles se saíam antes, durante e depois da aplicação da Resolução de Problemas, comparando e discutindo seus resultados. Além disso, também se buscou avaliar se o professor conhecia e fazia uso da Resolução de problemas com seus alunos.

A análise dos resultados dos alunos mostrou que houve uma melhora nos resultados do teste de verificação, se comparado com o teste de sondagem. Além disso, no decorrer da

aplicação da Resolução de Problemas, pôde-se perceber que muitos alunos, ao participar das discussões, tiveram um maior entendimento quanto às questões trabalhadas, o que, certamente, contribuiu para o aumento no número de acertos. Em contrapartida, vários alunos não demonstraram evolução, seja no teste de sondagem, no de verificação, ou mesmo durante a aplicação da metodologia em sala.

Portanto, a pesquisa mostrou que o ensino da geometria plana por meio da Resolução de Problemas pode trazer resultados positivos, auxiliando na compreensão de conceitos de área e perímetro de figuras planas, porém nem todos os alunos reagem da mesma forma a uma metodologia. Sugere-se, então, que sejam utilizadas também outras tendências, para que alunos que não reagem bem a uma metodologia, possam fazer parte da construção do conhecimento por meio de outra.

REFERÊNCIAS

BAHIA. Secretaria da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio área**: matemática. Salvador: Secretaria da educação, 2015.

BAUER, Martin W; GASKELL, George. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**: um manual prático. Tradução de Pedinho A. Guareschi. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHEVALLARD, Yves; BOSH, Marianna; GASCÓN Josep. **Estudar Matemática:** o Elo entre o Ensino e a Aprendizagem. Arimed. Porto Alegre, 2001.

DANTE, Luis Roberto. **Didática da resolução de Problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2007.

EVES, Howard. **História da geometria**. Tradução de Hygino H. Rodrigues. São Paulo: Atual, 1995.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flamming; MELLO, Ana Claúdia Collaço de. **Tendências em Educação Matemática:** Livro didático. 2. ed. - Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2007.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? A educação matemática em Revista Geometria, Blumenau, SC: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III, p.3- 13 1° semestre. 1995.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia científica. 9 ed**. São Paulo: Atlas, 2017.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, p. 199-218

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetekité.** Campinas. P, 7-17, 1993.

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

SMOLE, Kátia C.S; CENTURIÓN, Marilia**. A matemática de jornais e revistas**. RPM n.º 20, 1.º quadrimestre de 1992.

CAPÍTULO 15

UTILIZAÇÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA DIFERENCIADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/03/2022

Cassia Bordim Santi
Colégio Estadual Caldas Júnior

RESUMO: O presente trabalho apresenta o relato de uma atividade desenvolvida nas aulas de Matemática, com alunos do 2º Ano do Ensino Médio de uma escola Estadual no município de Alegria/RS. A atividade foi proposta com o objetivo de proporcionar situações de aprendizagem para compreensão de conceitos matemáticos estatísticos e financeiros. A metodologia do trabalho se deu em sala de aula, inicialmente com a explanação da atividade chamada Brechó. Os alunos foram distribuídos em grupos. Cada grupo ficou responsável por, criar um slogan, arrecadar, através de doações, artigos usados, relacionados a vestuário, calçados e acessórios (masculino, feminino e infantil), pela divulgação, a qual foi realizada em forma de panfletos, cartazes, cobertura da mídia local na estação de rádio com chamadas ao vivo e pelas redes sociais. Após cada grupo arrecadar os artigos, tiveram que tabelar e etiquetar valores. O Brechó foi desenvolvido no pavilhão da cidade, e cada grupo organizou seu espaço e as vendas. Com a atividade foi possível explorar muitos conceitos matemáticos, como, porcentagem, custos, receitas, lucro, média, tabelas e gráficos estatísticos, a atividade também contribuiu para a articulação de outros conceitos, como juros e variabilidade. Os conceitos matemáticos foram trabalhados de forma atrativa, permitindo vivenciar a aplicação dos mesmos, como também puderam vivenciar a experiência de vendas, e compreender a importância de um trabalho em equipe.

PALAVRAS-CHAVE: Metodologia; Aprendizado; Brechó.

INTRODUÇÃO

A matemática nos dias de hoje ainda é rejeitada por parte dos alunos, isso, porque se tem a concepção de que a disciplina é difícil, que tem muitas fórmulas e cálculos, sendo que os mesmos precisam ser decorados, e que a matemática estudada na escola não está presente no dia a dia.

> Para os alunos, a principal razão do insucesso na disciplina de Matemática resulta desta ser extremamente difícil de compreender. No seu entender, os professores não a explicam muito bem nem a tornam interessante. Não percebem para que serve nem porque são obrigados a estudá-la. Alguns alunos interiorizam mesmo desde cedo uma autoimagem de incapacidade em relação à disciplina. Dum modo geral, culpam-se a si próprios, aos professores, ou às características específicas da Matemática (PONTE, 1994, p. 2).

No entanto, cada vez mais educadores estão buscando metodologias e estratégias que melhoram o ensino aprendizagem da matemática, mostrando aos alunos a relação dos conhecimentos matemáticos adquiridos na

escola com situações de sua realidade.

Enquanto docente, atuando como professora de matemática no ensino básico (fundamental e médio), minha preocupação sempre foi de fazer com que os alunos vivenciem a matemática, onde não ficassem estudando somente dentro da sala de aula, possibilitando praticá-la e perceber o quanto ela está presente em nosso cotidiano, e após, aplicar os conceitos em diferentes situações problemas, portanto:

> [...] me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da matemática é a capacidade de modelar situações reais, codifica-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em um outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para uma situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino. (D´AMBRÓSIO, 1986, p. 44)

Neste sentido, a educação matemática financeira se dá em aprender de forma significativa os conceitos e saber transferir o conhecimento para diferentes situações.

> [...] o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários. (DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA BRASIL, 2006, p. 135).

Muitas vezes um dos recursos a serem usados nas aulas é o livro didático, porém nem sempre é possível devido a forma como os conceitos são abordados, segundo Amaral; Rosetti; Schimiguel: “Os livros didáticos, em grande parte, abordam a Matemática Financeira de forma superficial e por meio de situações artificiais”. (2013, p. 33)

Em maio de 2014, estava ministrando aulas de matemática para uma turma do 2° ano do ensino médio, senti que havia a necessidade de uma prática pedagógica diferenciada, que envolvesse os alunos, que eles vivenciassem uma situação e que a partir desta, dariam significado aos conceitos que seriam trabalhados.

> Educação Matemática será, pois, expressão vaga se não for concebida como preenchendo-se, reflexiva e continuamente, dos significados que vêm da prática. A Educação Matemática dá-se como uma reflexão-na-ação. Ação que ocorre num contexto no qual vivemos com o outro: compartilhando vivencias. Exige-se, portanto, dos que lançam a iniciativa de perscrutar os domínios dessa região do conhecimento, o conviver com a perspectiva do outro, dialogicamente exercitando aos trabalhos coletivos (BICUDO; GARNICA, 2002, p. 40).

Após um período de planejamento, analise e troca de ideias com a direção, a atividade foi elaborada, a prática pedagógica foi definida como Brechó, a qual possibilitaria ensinar conceitos da educação matemática financeira e estatística com significado, e além disso, promover o consumo consciente, pois é um assunto muito importante que está ligado

a sustentabilidade e a vivencia da comercialização, pois muitos de nossos alunos, após se formar no ensino médio, inicialmente vão trabalhar no comércio como vendedores, operadores de caixa, entre outros.

> A cultura do brechó vai muito além de comprar uma roupa boa e barata. Esbarra num conceito muito atual e urgente: sustentabilidade. Ao adquirir uma roupa usada, além de prolongar a vida útil da peça, é possível economizar dinheiro e ainda reduzir a demanda de produção nas fábricas, diminuindo gastos com energia e água e na emissão de produtos químicos poluentes. (AZEVEDO, 2019).

A atividade teve como objetivo geral desenvolver uma prática pedagógica diferenciada que contribui para a aprendizagem de conceitos da matemática financeira e estatística, promovendo o consumo consciente e a vivencia da comercialização.

Especificamente, pretendi:

- desenvolver conteúdos de juros, receitas, custos, lucro, média, variabilidade;
- refletir sobre o consumo;
- desenvolver o trabalho em equipe;
- constatar, junto aos alunos envolvidos, suas percepções em relação à prática pedagógica diferenciada utilizada nas aulas de matemática.

O escopo deste artigo é o relato de experiência de uma atividade prática desenvolvida durante as aulas de Matemática, que permitiu trabalhar conceitos da matemática e estatística, também possibilitando experienciar a atividade comercial de vendas, refletir sobre o consumo e compreender a importância de um trabalho em equipe.

RELATO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A atividade foi desenvolvida nos meses de maio, junho e julho do ano de 2014, em uma escola estadual do município de Alegria/RS, durante as aulas de matemática, em uma turma de alunos do 2º Ano do Ensino Médio. A atividade foi desenvolvida em quatro etapas, a primeira fora da sala de aula, a segunda em sala de aula, a terceira no pavilhão do município e a quarta em sala de aula.

Inicialmente a professora propôs a atividade Brechó para a turma, e os alunos aceitaram e se comprometeram em se empenhar na realização da mesma. A turma foi organizada em grupos e cada grupo criou um slogan, ou seja, um nome para o seu Brechó.

A primeira etapa consistia em arrecadar, através de doações, artigos usados, relacionados a vestuário, calçados e acessórios, masculino, feminino e infantil. Após arrecadar os artigos, os mesmos deveriam ser selecionados. Os estudantes também foram responsáveis pela divulgação, confeccionaram cartazes, fizeram publicações em redes sociais, e também usaram a mídia local, fazendo chamadas ao vivo na estação de rádio.

A segunda etapa consistia em tabelar cada produto, com descrição e valor. Os

valores dos artigos variaram de R$ 0,05 até R$ 5,00. Cada grupo atribui os valores nos artigos, avaliando cada peça.

A terceira etapa foi a realização do Brechó, aconteceu no dia 10 de julho de 2014, das 9 horas até às 15 horas, no pavilhão, localizado na praça do município, com a autorização do prefeito. Os alunos vieram duas horas antes e organizaram os artigos em mesas e cabideiros. Cada grupo organizou os integrantes em: vendedores, operador de caixa e recepcionista. Vale ressaltar que eles pesquisaram como atender bem os clientes. Após o encerramento da atividade, os artigos que não foram vendidos foram repassados para a assistência social do município.

A quarta etapa consistiu em realização de cálculos, iniciando com a contagem do valor arrecadado com as vendas dos artigos, cálculos de porcentagem de vendas em relação aos artigos que cada grupo havia arrecadado e tabelado, cálculo de porcentagem de venda de cada grupo em relação a todos os grupos, média de venda. Foram abordados os conceitos de custos, receitas e lucro, pois os grupos tiveram alguns custos com compra de materiais para a exposição dos artigos. Posteriormente foi realizada a representação gráfica das vendas por meio de gráfico de barras e setores, a professora ensinou a elaborar os gráficos com o uso de instrumentos de medição (régua, transferidor e compasso), e também com o uso do software Excel. A partir desta atividade foram introduzidos os conceitos de variabilidade e juros.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A proposta inicial da atividade prática Brechó teve seus objetivos alcançados, pois contribuiu significativamente na compreensão e na aprendizagem dos conceitos da matemática financeira e estatística. Foi possível articular outros conceitos como, juros, receitas, custos, lucro, média, variabilidade, a partir da atividade. A partir do Brechó os alunos analizaran e refletiram sobre o consumo consciente, pois os artigos arrecadados eran bons, tanto que, muitos alunos realizaram compras também, confirmando que, economizar comprando menos, é diferente de comprar barato.

Os alunos estavam muito empolgados com o Brechó, todos participaram ativamente, se organizaram nos grupos de forma exemplar. Conseguiram trabalhar em equipe, e perceberam o quanto é importante.

Alguns se destacaram na parte de vendas, outros, sentiram dificuldades, pois não imaginavam como era a comercialização. Alguns grupos usaram estratégias de vendas, como por exemplo, compre duas peças e a terceira é grátis, outros ofereciam chazinho para os clientes, cada grupo se organizou com uma estratégia para atrair clientes.

Com essa atividade prática foi possível perceber o quanto a metodologia diferenciada aplicada pelo educador interfere na aprendizado dos alunos.

[...] ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender'

> mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade (FIORENTINI; MIORIM, 1993, p. 5).

Nas Figuras I e II são fotos que foram feitas antes do Brechó e no dia.

A Figura I mostra um dos momentos em que a professora acompanhou o aluno na estação de rádio para fazer a divulgação do Brechó.

Fonte: Autora (2014)

A Figura II mostra um dos grupos de alunas em seu espaço no Brechó.

Fonte: Autora (2014).

O ensino não deve dar-se de práticas mecanizadas, o professor é o mediador e facilitador do processo da aprendizagem, e que muitas vezes será necessário enfrentar

muitos desafios. Nos dias atuais é preciso se reinventar, se adaptar as mudanças que surgem a cada dia.

> "A relação entre ensino e aprendizagem não é mecânica, não é uma simples transmissão do professor que ensina para um aluno que aprende. Portanto é uma relação recíproca na qual se destacam o papel dirigente do professor e a atividade dos alunos. " Dessa forma podemos perceber que "O ensino visa estimular, dirigir, incentivar, impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos". (Libâneo, 1994, p. 90)

Essa atividade desencadeou o interesse de outras turmas em realizar a atividade, então, todos os anos, uma turma do ensino médio realizaria a atividade prática Brechó.

CONCLUSÃO

Neste artigo foi abordada uma atividade prática que possibilita ao aluno aprender Educação Matemática e Estatística significativamente. no qual foi fundamental a participação e o envolvimento do aluno.

A atividade prática Brechó atingiu o objetivo proposto, a partir dos resultados apresentados. Sendo assim, com a atividade desenvolvida foi possível perceber que a proposta de trabalho foi desenvolvida com êxito e que proporcionou momentos de criatividade, envolvimento trabalho em equipe, posso dizer que foi muito gratificante.

A Educação Financeira e Estatística precisa ser ensinada com estratégias diferenciadas, contribuindo para a formação de um indivíduo mais reflexivo.

Considerando a prática abordada neste artigo, sugere-se que os educadores e os futuros educadores reflitam em sua prática docente, planejem e proporcionem atividades práticas diferenciadas em suas aulas, pois as mesmas contribuem significativamente para aprendizagem do aluno como também o contribuem para o desenvolvimento profissional do professor.

REFERÊNCIAS

AMARAL, G. P.; ROSETTI, H.; SCHIMIGUEL, J. **Dinheiro, Matemática Financeira, Conhecimentos Financeiros e Cidadania no Contexto da Educação Pública Básica.** Vitória, n. 4, p. 29-35, jul./dez. 2013.

AZEVEDO, Aline. **Atividade sobre o texto "Brechó e consumo consciente: uma mistura que dá certo".** https://tribunademinas.com.br/especiais/publieditoria/23-03-2019/brecho-e-consumo-consciente-uma-mistura-que-da-certo.html. Acesso em: [julho 14 2021].

BICUDO, M. A V.; GARNICA, AV.M. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autênctica, 2002. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BRASIL, **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral, 2006.

D´AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação.** Reflexões sobre educação e matemática. 5° Ed. Campinas, SP: Summus, 1986.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. Â. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática**. Boletim SBEM/SP, v. 4, n. 7, 1993. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos_didaticos.asp?aux =C> . Acesso em: 02 out. 2018

LIBÂNEO, José Carlos. **Os métodos de ensino**. São Paulo: Cortez, 1994.

PONTE, J. P. **Matemática: Uma disciplina condenada ao insucesso**. NOESIS, 1994, n. 32, p. 2.

CAPÍTULO 16

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL ATRAVÉS DO LÚDICO: UMA REVISÃO NARRATIVA

Data de aceite: 01/03/2022

Fernnanda Luciano Fernandes
Universidade Vale do Cricaré (UVC)
São Mateus – Espírito Santo
https://orcid.org/0000-0002-9296-7360

Rosangela Minto Simões
Faveni
Vitória – Espírito Santo
https://orcid.org/0000-0002-0921-3198

Carla Corrêa Pacheco Gomes
Universidade Vale do Cricaré (UVC)
São Mateus – Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/8080845021011800

Vanilza Maria Rangel de Moraes
Faveni
Vitória – Espírito Santo
https://orcid.org/0000-0002-1446-0812

Maristela Athayde Rohr
Faveni
Vitória – Espírito Santo
https://orcid.org/0000-0003-4642-7889

RESUMO: Este artigo buscou através da literatura existente demonstrar como o ensino da matemática na educação infantil pode ser enriquecido através do lúdico, fortalecendo o processo de aprendizagem dos alunos. A partir do momento em que a criança brinca, passa a dispor de informações a seu próprio respeito, o que indica que o ato de brincar pode ser ainda mais útil, no sentido de estimular seu pleno crescimento, de forma integral, tanto no ambiente familiar, quanto, ainda mais, no ambiente escolar. As crianças passam um tempo considerável em ambientes educacionais, espaços onde, tradicionalmente, exercitam atividades e brincadeiras. Um ambiente lúdico, nessa fase, é sempre relacionado a um mais acurado aprimoramento intelectual, social e emocional. A Matemática é uma parte importante do aprendizado das crianças, nos primeiros anos da infância, porque fornece habilidades vitais para a vida. Os estudos da Matemática ajudam as crianças a resolverem problemas, medir e fomentar sua própria consciência espacial, ensinando a elas, sobretudo, como utilizar e melhor entender formas. Embora a pesquisa enfatize a dimensão da Matemática na Educação Infantil, os educadores necessitam de abordagens eficazes e inovadoras da Pedagogia. O objetivo do lúdico, no processo ensino-aprendizagem é modificar as estratégias relacionais do indivíduo e levá-lo a desenvolver o mais plenamente possível sua capacidade de ação inteligente e criadora, seja seu potencial íntegro ou esteja ele afetado por deficiências.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Infantil. Lúdico. Matemática. Ensino.

TEACHING MATHEMATICS IN CHILDHOOD EDUCATION THROUGH PLAY: A NARRATIVE REVIEW

ABSTRACT: This article sought through the existing literature to demonstrate how the teaching of mathematics in early childhood education can be enriched through play, strengthening the students' learning process. From the moment children play, they have information about

themselves, which indicates that the act of playing can be even more useful, in the sense of stimulating their full growth, in an integral way, both in the family environment. , even more so in the school environment. Children spend considerable time in educational environments, spaces where they traditionally exercise activities and play. A playful environment, at this stage, is always related to a more accurate intellectual, social and emotional improvement. Mathematics is an important part of children's early childhood learning because it provides vital life skills. Mathematics studies help children to solve problems, measure and foster their own spatial awareness, teaching them, above all, how to use and better understand shapes. Although the research emphasizes the Mathematics dimension in Early Childhood Education, educators need effective and innovative approaches to Pedagogy. The objective of the ludic, in the teaching-learning process is to modify the individual's relational strategies and lead him to develop as fully as possible his capacity for intelligent and creative action, whether his full potential or he is affected by deficiencies.
KEYWORDS: Child education. Ludic. Math. Teaching.

1 I INTRODUÇÃO

As brincadeiras são importante forma de comunicação. É por meio delas que a criança tende a retratar o seu cotidiano. A prática do ato de brincar promove o processo de aprendizagem da criança, em razão de que permite facilitar a construção da reflexão, da autonomia e da criatividade, determinando, desse modo, uma relação mais estreita entre o jogo e um melhor aprendizado.

A fim de expandir o conceito de brincadeira infantil, ressaltamos a importância do brincar voltado para o verdadeiro desenvolvimento integral do ser humano, nos aspectos físico, social, cultural, afetivo, emocional e cognitivo. Dessa forma, se faz necessário conscientizar os pais, professores e a sociedade em geral sobre o poder que a ludicidade tem, quando vivenciada na infância, isto é, de que o brincar é parte integrante de um estágio gratificante e prazeroso, e não tão somente um lazer, mas também um ato de busca de conhecimento. Nesse contexto, o brincar, na Educação Infantil, propicia à criança estabelecer vínculos, diante das regras constituídas por si e em grupo, contribuindo, assim, na integração do indivíduo na sociedade. Em vista disso, a criança estaria solucionando conflitos e hipóteses de consciência crítica e, ao mesmo tempo, desenvolvendo a capacidade de compreender pontos de vista diferentes, de melhor fazer-se entender e de demonstrar sua opinião em relação aos outros, ao mundo a sua volta.

A partir do momento em que a criança brinca, passa a dispor de informações a seu próprio respeito, o que indica que o ato de brincar pode ser ainda mais útil, no sentido de estimular seu pleno crescimento, de forma integral, tanto no ambiente familiar, quanto, ainda mais, no ambiente escolar. Ademais, é brincando que a criança pode aprender o respeito às regras, expandindo o seu relacionamento social e, consequentemente, respeitando a si mesma e aos seus iguais.

A prática do lúdico compreende a melhora do rendimento escolar, além do

conhecimento, a oralidade, o pensamento e o sentido, que são otimizados de forma plena e atraente para o aluno. Sendo assim, nesse sentido, Goes (2008) orienta que:

> [...] a atividade lúdica, o jogo, o brinquedo, a brincadeira, precisam ser melhorados, compreendidos, e encontrar maior espaço para serem entendidos como educação. Na medida em que os professores compreenderem toda sua capacidade potencial de contribuir no desenvolvimento infantil, grandes mudanças irão acontecer na educação e nos sujeitos que estão inseridos nesse processo (GOES, 2008, p. 37).

Como confirma Freire (1999), a especialidade da criança é brincar. Em vista disso, quando se pretende estabelecer um diálogo com as crianças, por meio do jogo, é melhor deixá-las falar primeiro. Melo e Valle (2005) asseveram que

> [...] brincar de forma livre e prazerosa permite que a criança seja conduzida a uma esfera imaginária, um mundo de faz de conta consciente, porém capaz de reproduzir as relações que observa em seu cotidiano, vivenciando simbolicamente diferentes papéis e exercitando sua capacidade de generalizar e abstrair (MELO; VALLE, 2005, p. 45).

A essa observação Aberastury (1972) faz um acréscimo, sublinhando que a brincadeira infantil é um meio de pôr para fora os medos, as angústias e os problemas que a criança enfrentou.

Em sentido amplo, é claro que as brincadeiras são benéficas e, quando propostas, as crianças aprendem, por intermédio da interação social, conversando, ouvindo e explorando os seus conceitos com colegas de classe, em pequenos grupos ou individualmente, praticando as atividades lúdicas, estimulando e encorajando discussões entre grupos de crianças e entre aluno e professor.

O brincar com colegas traz retorno imediato em prol das crianças. Muitas vezes, quando brincam, elas são capazes de articular e esclarecer ou expressar sua compreensão do que há à sua volta. Tudo indica que isso acontece ao se brincar, por exemplo, com jogos, o que pode encorajar a devida compreensão das crianças em relação a seu entorno. Ao brincar com um jogo, elas demostram que precisam prever, testar, fazer generalizações, justificar decisões e verificar os procedimentos de acordo com o que é oferecido nas brincadeiras. Os alunos podem fortalecer seus conhecimentos prévios e forma*r links* entre o jogo e o seu ambiente cotidiano.

Para que tenhamos uma educação eficaz, faz-se altamente indispensável que as instituições de ensino disponham de cursos de atualização e formação continuada para os educadores, com o propósito de que estes profissionais sejam devidamente qualificados e se beneficiem da experiência ao longo de sua vida profissional. Em relação aos educadores, em seu período inicial, a formação de nível superior é importante para que estes possam iniciar o exercício do magistério de forma qualificada e coerente com a Lei de Diretrizes e Bases, cujo texto indica que as funções do docente englobam não apenas a atividade em sala de aula (docência), mas também a coordenação, o assessoramento pedagógico e a

direção, necessários ao funcionamento da unidade escolar de Educação Infantil e Ensino Fundamental e Médio (LDB, 96).

Ainda em relação ao Referencial Curricular Nacional da Educação Infantil (RCNEI) (BRASIL, 1998), este caracteriza o professor de Educação Infantil como um profissional polivalente, isto é, alguém que, especialmente, deverá trabalhar a formação a partir da identidade das crianças, através da aquisição de hábitos e valores, assim como da aprendizagem de diversificadas temáticas, e em diversos campos do conhecimento (como, por exemplo, a linguagem oral e escrita, matemática, artes, meio ambiente, música, e assim por diante) para que as crianças ampliem plenamente as diferentes extensões do saber.

Quando se aplicam os jogos, nota-se o quanto os alunos gostam, o quanto eles praticam, como estão motivados, o devido interesse que eles demonstram no resultado. Nesse contexto, o mais provável é que as percepções floresçam a partir do momento em que os jogos agucem as crianças a aprender. Os jogos podem permitir aos professores uma forma de despertar o interesse dos estudantes, como um meio de adquirir os conceitos e fornecer uma alternativa para métodos de ensino mais formais, o que não quer dizer que a aprendizagem não tenha espaço em outro lugar.

Dado o lastro inicial, propõe-se como objetivo desta revisão narrativa, apresentar como o lúdico contribui para o ensino da matemática na educação infantil.

2 | O LÚDICO E A LITERATURA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

As crianças passam um tempo considerável em ambientes educacionais, espaços onde, tradicionalmente, exercitam atividades e brincadeiras. Um ambiente lúdico, nessa fase, é sempre relacionado a um mais acurado aprimoramento intelectual, social e emocional. Embora presumamos que a didática dos professores seja importante na criação de um ambiente escolar lúdico, ainda falta um conhecimento empírico sobre esse assunto.

Assim como a Literatura Infantil deve ser experimentada, a escola deve ampliar seus significados, utilizando livros nos quais um mundo inteiro possa estar devidamente representado. Nesse aspecto, o conceito de literatura crítica se destaca como forma pedagógica de inclusão da criança em seu contexto social. Ademais, no processo de alfabetização, o jovem leitor deve ser confrontado, principalmente, com conflitos e estratégias de solução no nível cognitivo. Além disso, devem ser projetadas e apresentadas soluções para que ele obtenha suportes para a vida cotidiana.

Na medida em que os professores e alunos manuseiem os diversificados textos para leitura, o interesse por ler se constituirá, ou melhor, se construirá de maneira dinâmica e adequada para que o aluno adquira novas habilidades de leitor. Importante ressaltar, nesse contexto de ensino e de aprendizagem leitora, que a aquisição da leitura não se limita ao primeiro ano de vida escolar. Contemporaneamente, reconhece-se que aprender a ler é um processo que se aprimora ao longo de toda a escolaridade e de toda a vida (ZILBERMAN,

1987).

Na prática da leitura, o aprendizado passa a ser um processo com todos os sentidos, não se fixando apenas no nível cognitivo de pensamento. Atualmente, as crianças possuem uma gama de experimentações, na mídia e, em verdade, têm disponíveis histórias emocionantes. Elas têm de ser estimuladas à leitura, de forma que possuam acesso às diversas e variadas obras de literatura infantil no ambiente escolar. Necessitam ser atraídas para a leitura com livros ilustrados, infantis, em uma aula de leitura na qual possam lidar de forma criativa com as histórias.

Lidar com literatura infantil em sala de aula é importante, pois se reconhece que a aura literária, muitas vezes, ajuda esses jovens leitores a encontrarem seus interesses, em sua necessidade de estimulação e entretenimento, mais do que quaisquer outros fatores. Ao lidar com a literatura infantil, os alunos podem criar muitas referências entre o mundo fictício do livro e seu próprio mundo de experiência, e ler com uma maior participação do ego. Essa experiência com a literatura infantil, para o leitor, é essencial à construção da leitura efetiva, visto que a experiência de lidar com literatura significa não só trabalho e esforço, mas também prazer e entretenimento.

Conforme salienta Carvalho (1992, p.14), os jogos, aliados à leitura, no cotidiano das crianças, são determinantes para a sua educação, visto que, a partir do momento em que leem e brincam, elas exploram e manuseiam tudo aquilo que se constitui à sua volta. De fato, mediante esforços físicos e mentais, e sem se sentirem coagidas pelo adulto, obtêm satisfação e têm a sensação de liberdade.

De acordo com Kishimoto (1999), ao instigar o imaginário infantil por meio de objetos simbólicos utilizados na leitura lúdica, a função pedagógica passa a ser contributiva para o desenvolvimento integral da criança:

> O jogo, aliado à literatura, são instrumentos pedagógicos muito significativos. No contexto cultural e biológico, são atividades livres que podem ser alegres e englobar uma significação. São de grande valor social, oferecendo inúmeras possibilidades educacionais, pois favorecem o desenvolvimento corporal e intelectual, estimulando a vida psíquica e a inteligência, contribuem para a adaptação ao grupo, preparando a criança para viver em sociedade, participando e questionando os pressupostos das relações sociais tais como estão postos (KISHIMOTO, 1999, p. 26).

Entende-se que a aprendizagem também se dá por meio de reflexão, discernimento, sentimentos, raciocínio, sensações e desejos. O processo de aquisição da leitura pressupõe um trabalho de construção de entendimento dos textos. Nesse aspecto, o conhecimento que se possui a respeito de um assunto passa a ser o que se entende sobre a língua. O prazer da leitura passa a acontecer a partir do momento em que se produz o significado, o sentido. Ainda: quanto mais experiências adquiridas de leituras anteriores, mais consciência e discernimento na formação de significação obterá o leitor, visto que é necessário compreender também através das entrelinhas.

Quem lê, interpreta, inquire, passa a estabelecer julgamentos acerca de como se pode ou se deve proceder, executando, dessa maneira, a sua plena e consciente cidadania. A partir do instante em que se lê, a realidade muda. Quanto a isso, cabe ao professor nortear os caminhos que conduzirão o aluno ao estímulo e à paixão pela literatura. É ele que deve ofertar um diversificado conjunto de livros aos seus alunos, de modo que possam seguir suas tendências, preferências e interesses.

O domínio da leitura vincula-se ao uso dos textos em diferenciadas situações. Cabe à escola ofertar um vasto leque de textos, para que a criança passe a desenvolver habilidades leitoras inerentes a cada um. O acesso à leitura de qualidade é também acessa a informações que alimentam o alcance da imaginação e despertam e estimulam o prazer no ato de leitura. Quando se cria o hábito da leitura, desde as séries iniciais, passa a ser fundamental o processo de alfabetização, o que se constitui um dos maiores desafios para o professor, do qual não se pode fugir, pois, de fato, a alfabetização adequada, com uma consistente formação da criança como leitora, é fundamental, visto que "[...] a leitura é um momento em que a criança pode conhecer a forma de viver, pensar, agir e o universo de valores, costumes e comportamentos de outras culturas em outros tempos e lugares que não o seu" (BRASIL, 1998, p.143).

Os conteúdos devem ser selecionados, de forma que as crianças permaneçam mais tempo voltadas à leitura, tendo, a partir daí, possibilidades de identificação, ao serem realmente arrebatadas em destino a novos mundos. No fantástico mundo da Literatura Infantil, o leitor encontra experiências de ficção, sob o signo de uma abordagem lúdica da realidade, em que os personagens inseridos na fantasia (estranhos, utópicos e extraordinários) caminham para o universo das crianças, através do livro.

O ato da leitura é uma realização diversamente cultural. A partir do momento em que o professor seleciona textos, poemas ou histórias, passa, naturalmente, a incentivar seus alunos a obterem a emoção da curiosidade. Segundo Abramovich (1997, p.17), "[...] por meio das histórias, a criança pode vivenciar diferentes emoções, sentindo profundamente o que as narrativas podem provocar no imaginário infantil."

Quanto às metodologias utilizadas na prática escolar, estas são variadas e múltiplas, e cabe aos professores lançarem mão da criatividade, de forma a fascinar as crianças e conquistar o desejo dos futuros leitores. O trabalho com as crianças deve implicar uma visão refinada, que permita aos educadores a percepção do gosto intrínseco a cada uma delas e as opiniões a respeito dos livros e histórias apresentadas. A esse respeito, avalia Abramovich (1993):

> Ouvir histórias é muito importante na formação de qualquer criança, é o início da aprendizagem para ser um leitor e, tornar-se um leitor é começar a compreender e interpretar o mundo. Por isso, precisamos ler histórias para as crianças, sempre, sempre[...] (ABRAMOVICH, 1993, p.17).

Isso posto, consideramos que cabe aos educadores proporcionarem oportunidades

aos alunos de aproximação/contato com a literatura infantil e o lúdico, de modo que as nossas crianças se transformem em futuros admiradores da leitura e das brincadeiras, tornando-se, dessa maneira, confiantes e preparados para uma melhor ponderação perante as adversidades que a vida impõe. Conforme se observa, o papel do educador, como leitor e entusiasta na sala de aula, é de extremo e fundamental valor para que o aluno se aproprie da língua escrita e dos jogos dispostos na didática.

3 | JOGOS E BRINCADEIRAS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A necessidade de que a aprendizagem seja precisa e personalizada, em relação aos educandos, é imperativa para gerar as condições de obtenção do conhecimento. Também é importante fornecer aos alunos ferramentas para estudar e compreender o significado do conteúdo que lhes é apresentado, adaptando as atividades às implicações para a prática da sala de aula e para seu cotidiano. A ludicidade na alfabetização oferece práticas baseadas em estudos e abordagens de pesquisa que sirvam de apoio aos alunos em sua formação, enfatizando o quanto é crucial reconhecer as suas múltiplas identidades sociais e sua interseção com o mundo.

Ao educador cabe ser preciso quanto ao propósito de, ao reunir os alunos, escolher o texto, as brincadeiras, jogos e conectar os interesses deles com a leitura disposta e a escrita, durante a metodologia, de forma que o ensino em sala de aula apresente familiaridade com o que foi exposto, envolvendo-os com o conteúdo aplicado, adequando, dessa forma, os alunos às suas habilidades de decodificação, para incrementar suas habilidades de compreensão.

Como a educação é uma área na qual sempre cabe lugar para diversificados caminhos a se trilhar e em que prevalecem, contemporaneamente, intensas demandas, garantir o retorno e preservação do elemento lúdico busca torná-la deveras estimulante, num universo em constantes transformações, no qual ela não poderá ficar estagnada. Dessa maneira, podemos considerar a reflexão manifesta por Borba (2007, p. 33), para quem se deve “[...] pensar o brincar de forma mais positiva, não como oposição ao trabalho, mas como uma atividade que se articula aos processos de aprender, se desenvolver e conhecer [...]”.

Para aprofundar o conhecimento dos alunos, compete ao professor desenvolver instruções de alfabetização responsável e eficaz, objetivando um melhor envolvimento e avanços na aprendizagem. Nesse aspecto, é importante que o professor desenvolva uma maior flexibilidade e o propósito de refinar algumas das práticas de alfabetização comumente utilizadas. Ademais, é necessário que a prática diária de ensino englobe alguns recursos e ferramentas para professores oferecerem o devido apoio aos alunos, em sua busca de conhecimento, o que ajudará a todos na obtenção de uma experiência escolar de qualidade.

Como a escola nem sempre se mostra atenta à formação de bons leitores, nem sempre busca proporcionar encontros significativos da criança com a obra literária, faz-se mister enfatizar os valores do "brincar" na educação, priorizando como tema o incentivo à leitura e à escrita, para mostrar que transmitir conhecimento pode ser feito por meio de atividades lúdicas, com o aperfeiçoamento do aluno leitor, envolvido numa relação de interação com a literatura infantil. Desse modo, a escola será uma ponte para o aluno relacionar o texto com o mundo em seu entorno. Nesse âmago, tudo o que se trabalha na escola está diretamente ligado à leitura e depende dela para se aprimorar. Ler é um processo de descoberta, mas também pode ser uma atividade lúdica (CAGLIARI, 2009).

Ler, assim como brincar, seria diferente de aprender a ler e/ou a brincar, eis que o método/processo de conhecimento e a aprendizagem/assimilação não devem ser confundidos apenas com propostas em questão. Desse modo, decodificar o que está disposto, nas brincadeiras e escrita, não garante autonomia e compreensão de mundo. Dito isso, chegamos a um dos objetivos sintomaticamente ausentes nos programas de alfabetização de crianças, que é o de compreender as funções da língua escrita na sociedade (FERREIRO; TEBEROSKI, 1991).

Por meio de diversificadas estratégias, há como atingir o estímulo da aprendizagem. Por exemplo, temos o fomento à música, peças teatrais, indução à leitura, elaboração de recursos didático-pedagógicos, entre tantas outras motivações que instigam a compreensão de que as atividades distintas dinamizam o ensino-aprendizagem das crianças. Dessa forma, e de acordo com Kuhlmann Junior (2010: 38), é nos diferentes espaços socioeducacionais e socioculturais que as crianças vão, cada vez mais, interagir, a fim de estimular diversas aprendizagens. Assim, é possível também afirmar a importância da família, pois no convívio familiar ocorrem as primeiras manifestações de aprendizagem e, *a posteriori,* a escola propicia o conhecimento sistematizado e formal.

Os alunos aprendem muito durante o processo dos jogos, já que, a partir dessa experiência, se tornam capazes de compreender um novo conceito ou ideia, assumir uma perspectiva diferente ou experimentar múltiplas opções ou variáveis. Ao fornecer um contexto para a prática envolvente, os jogos precisam de uma execução constante para que o aluno internalize as aprendizagens, através de estruturas importantes. No entanto, para que a prática seja significativa, os discentes devem estar engajados, o que raramente pode acontecer por meio de incontáveis páginas de livros ou exercícios de livros didáticos nem sempre altamente envolventes. Por outro lado, com o uso dos jogos animados de charadas, os alunos podem utilizar de bom grado o vocabulário e as estruturas apresentadas, adquirindo repetidamente a prática necessária.

4 | O LÚDICO NO ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

A Matemática é uma parte importante do aprendizado das crianças, nos primeiros

anos da infância, porque fornece habilidades vitais para a vida. Os estudos da Matemática ajudam as crianças a resolverem problemas, medir e fomentar sua própria consciência espacial, ensinando a elas, sobretudo, como utilizar e melhor entender formas. A Matemática ajuda a criança a desenvolver competências, desde assumir riscos a refinar as habilidades motoras e a empatia, sendo que pode ser uma das ferramentas de ensino mais eficazes – e menos caras – disponíveis.

Assim, há que se constar que a Matemática proporciona oportunidades para o aluno desenvolver, com mais acuidade, diversificadas habilidades durante a pré-escola, indo além dos números. Por isso, Smole, Diniz e Cândido (2000) anunciam que:

> Um dos maiores motivos para o estudo da Matemática na escola é desenvolver a habilidade de resolver problemas. Essa habilidade é importante não apenas para a aprendizagem matemática para a criança, mas também para o desenvolvimento de suas potencialidades em termos de inteligência e cognição (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2000, p. 13).

As habilidades matemáticas, trabalhadas no decorrer da Educação Infantil, são projetadas de modo a fornecer a base de que as crianças necessitam para ter sucesso nos estágios futuros. Por isso, é sempre considerável ressaltar que os educadores devem concentrar as lições da primeira infância nas habilidades básicas, para que melhor se desenvolva uma matemática avançada no ensino médio e superior. Da pré-escola ao final do ensino fundamental, as crianças estarão estabelecendo as bases para futuras habilidades de suas vidas.

Nas instituições de Educação Infantil, tanto a rotina quanto o planejamento estão presentes no cotidiano escolar. Ademais, existem as práticas conjuntas, entre os educadores e alunos, que são primordiais, propiciando uma mais satisfatória aprendizagem, à proporção que as crianças frequentam a escola. Nessa perspectiva, Barbosa (2006) salienta que estabelecer rotinas é fator essencial para a organização das instituições. Ainda conforme a aludida autora, há muitas denominações dadas à rotina: horário, emprego do tempo, sequência de ações, dentre outros. Desse modo, podemos inferir que, por meio da rotina, se disponibiliza, tanto para os professores quanto para os alunos, uma orientação há cerca de tempo e espaço, o que proporciona uma sensação de segurança para ambos.

Ao introduzir as noções de ato e objetivo e de aprender e brincar (por ato, queremos dizer como as crianças brincam e aprendem e por objetivo que as crianças brincam e aprendem), se apresenta uma abordagem alternativa de educação infantil, a pedagogia do desenvolvimento, baseada em pesquisas recentes no campo do jogo e da aprendizagem, relacionadas a abordagens pertinentes acerca do assunto em questão.

Podemos aferir, sobre esse campo de experiência, o qual contempla a Matemática durante a Educação Infantil, que para sempre estará manifesto na rotina das crianças em seu período escolar. Desse modo, é necessário compreender o quanto é proeminente à Matemática promover oportunidades de aprendizado. Em vista disso, a Base Comum

Curricular estipula propósitos indicados à promoção da aprendizagem e desenvolvimento das crianças, os quais são Brasil (2017, p. 47-48):

> - Registrar observações, manipulações e medidas, usando múltiplas linguagens (desenho, registro por números ou escrita espontânea), em diferentes suportes;
>
> - Classificar objetos e figuras, de acordo com suas semelhanças e diferenças;
>
> - Resolver situações problema, formulando questões, levantando hipóteses, organizando dados, testando possibilidades de solução;
>
> - Relacionar números às suas respectivas quantidades e identificar o antes, o depois e o entre em uma sequência;
>
> - Expressar medidas (peso, altura etc.), construindo gráficos básicos.

As crianças são naturalmente visuais e, por isso, tendem a construir relacionamentos entre os números e um item representado, passando a utilizar estas representações ou figuras, de modo que deixa evidente que a relação está tornando o uso da matemática real para as suas mentes. Não à toa, a Educação Infantil deve se concentrar em representar números com itens, gravuras ou até mesmo membros da família. Por exemplo, para facilitar o aprendizado básico da contagem, podemos usar figuras de maçãs ou frutas favoritas, o que ajuda as crianças a reconhecerem que o número representa os itens retratados. Na mesma linha de pensamento, Reame et. al. (2012, p. 152) inferem que a literatura infantil representa um contexto significativo para a aprendizagem de noções matemáticas: “nesse contexto, o aluno se expressa de maneira natural e informal, permeada de ludicidade, livre do medo de errar”.

Por meio de representações ou figuras, o ensino permite que as crianças façam conexões entre o mundo real e as habilidades matemáticas, as quais são vitais para o triunfo acadêmico. Sem estabelecer uma conexão entre a vida e a matemática, as crianças podem ficar confusas com as informações fornecidas na sala de aula. Embora a Educação Infantil deva introduzir os conceitos antes das habilidades, os professores podem começar o básico de somar e subtrair antes mesmo que as crianças ingressem no Ensino Fundamental. As habilidades básicas são utilizadas nas interações normais da infância, como compartilhar quitutes, subtraindo o número original para garantir que as crianças tenham o mesmo número de guloseimas.

Ao se concentrarem nos conceitos básicos de adição e subtração, os professores podem fornecer uma base mais sólida, nas habilidades matemáticas, para o futuro. Dependendo da idade das crianças, os conceitos básicos de adição e subtração podem limitar as habilidades para compartilhar itens alimentares ou adicionar itens para atividades lúdicas que incentivam as crianças a contar os itens extras.

No mais, a geometria e o raciocínio espacial são peças significativas, em si, ao estabelecer uma base crítica cognitiva, a fim de aprimorar a matemática, bem como outras áreas temáticas. As crianças começarão a aprender geometria no jardim de infância e

continuarão estudando o assunto durante os ensinos fundamental e médio. Com atividades e projetos práticos, explorar a geometria pode ser divertido, mas também um tópico desafiador da capacidade de entendimento de algumas crianças.

Ao lidar com o currículo de Matemática na Educação Infantil, Lamonato (2007) assinala que o desenvolvimento da Geometria pelos professores da pré-escola é quase ausente, o que foi observado por ela a partir de depoimento dos próprios professores. Apesar de sua importância, a geometria e o pensamento espacial nem sempre desempenham um papel significativo nas salas de aula. Por isso, conforme o estudo em questão, é primacial obter-se uma compreensão completa dos processos de aprendizagem conduzidos com as crianças durante o desenvolvimento da cognição visual e habilidades de geometria relacionadas.

Nessa perspectiva, cumpre evocar que, quando a criança chega à escola, ela já leva consigo noções basilares, uma vez que a percepção do tempo/espaço se encontra em toda sua atividade. Conforme Lorenzato (2011), a criança começa a ter essa percepção a partir do instante em que, valendo-se do próprio corpo, no momento em que alcança seus olhares, gestos e movimentos, se desloca no espaço. Lorenzato (2011) destaca, ainda:

> É natural que a educação infantil favoreça o desenvolvimento da percepção espacial da criança. É importante que assim seja por que tal desenvolvimento será fundamental à aprendizagem da Geometria no ensino fundamental e, acima de tudo, por que possibilitará à criança um conjunto de conhecimentos e de habilidades que outras matérias não conseguem suprir (LORENZATO, 2011, p.136).

Quando se incorpora uma abordagem mais científica ao desenvolvimento curricular, o foco são, especialmente, trajetórias de aprendizagem baseada em pesquisa, no bojo do aspecto crítico do ensino de geometria precoce, em que esses estudos são multifacetados. Aprendendo a geometria, sintetizam-se as descobertas e é traçado o ensino de Geometria para as crianças. Por isso, é muito importante fazer com que elas amplifiquem seus conhecimentos de geometria, independentemente da idade.

Na construção do conhecimento de formas, a Geometria, em especial, ajuda as crianças a ampliar o conhecimento básico das propriedades, medidas e relações dos pontos, linhas, ângulos e superfícies. Ainda mais, o sistema geométrico aponta todos os círculos ao seu redor, como pratos ou tampas de latas, isto é, nomeia as formas que as crianças veem em seu ambiente, o que é edificante para o seu progresso. No sentido de prolongar essas experiências, os educadores passam, por exemplo, o dedo pelos objetos enquanto dizem “círculo” e falam sobre como estes continuam se curvando, enquanto pedem às crianças que façam o mesmo, ao passo que, enquanto estiverem falando sobre triângulos, indicam os lados retos e os cantos agudos.

Neste universo, a Geometria, no decorrer da Educação Infantil, com o estudo de figuras, formas e relações espaciais, dispõe de possibilidades únicas e pertinentes

ao desenvolvimento de uma competência espacial nas crianças, isto é, a oportunidade extraordinária de perceberem o espaço no qual vivem, respiram, se movem e que devem aprender a explorar, conquistar, ordenar e representar (SMOLE, 2003).

E por que podemos estar tão confiantes de que os benefícios dessas atividades são tantos e se dão de tantas maneiras? As crianças tendem a demostrar progresso em habilidades geométricas e espaciais, a obter variados benefícios claros na aprendizagem matemática, o que também acontece em sua preparação para a escrita, inclusive aumentam suas pontuações de QI – Quociente de Inteligência. Assim, elas passam a estar mais bem preparadas para a escola – e para a vida – quando passam a usar as ferramentas das ideias geométricas básicas.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O brincar, reconhecemos, é, para além do aprendizado, componente natural do dia a dia das crianças. Quando se pergunta às crianças o que mais gostam de fazer, as respostas são sempre unânimes: brincar. No entanto, e por outro lado, tem-se que a sua educação é, em sentido geral, organizada de forma a promover o aprendizado no lugar de brincar. Entretanto, enquanto a escola é tradicionalmente vista como um local de aprender e não brincar, a pré-escola é mais frequentemente associada ao brincar do que ao aprender, na perspectiva infantil.

Do ponto de vista das crianças, brincar e aprender nem sempre são separados nas práticas durante os primeiros anos. Por isso, é sempre importante examinar o caráter dos primeiros anos da Educação, em termos de brincadeira e aprendizado. Cabe, nesse ponto, reforçar que a aprendizagem, durante a pré-escola, relacionada ao currículo da Educação Infantil, propõe uma pedagogia sustentável para o futuro, que não separe o jogo do aprendizado, e que se baseie na busca por promover a criatividade nas futuras gerações.

Embora a pesquisa enfatize a dimensão da Matemática na Educação Infantil, os educadores necessitam de abordagens eficazes e inovadoras da Pedagogia. Conforme indica Huisinga (1996), o objetivo do lúdico, no processo ensino-aprendizagem “[...] é modificar as estratégias relacionais do indivíduo e levá-lo a desenvolver o mais plenamente possível sua capacidade de ação inteligente e criadora, seja seu potencial íntegro ou esteja ele afetado por deficiências.” (HUISINGA, 1996, p. 17).

A brincadeira também é considerada uma prática iniciada pelas crianças, enquanto a aprendizagem é vista como resultado de uma prática ou atividade iniciada por um adulto. No contexto dos primeiros, educação infantil, brincar e aprender são frequentemente separados no tempo e espaço. Tempo, horas de alfabetização, trabalhos de arte criativa, dentre outros, são vistos como práticas de ensino e instrução e, portanto, a origem da aprendizagem, enquanto o brincar é deixado para o tempo de lazer, ou ao ar livre, e faz

parte do próprio âmbito infantil. Paralelamente, além de ser uma preciosa oportunidade, o brincar é uma etapa única de aprendizado.

REFERÊNCIAS

ABERASTURY, A. **A criança e seus jogos**. Petrópolis: Vozes, 1972.

ABRAMOVICH, F. **Literatura Infantil:** gostosuras e bobices. São Paulo: Scipione,1993.

BORBA, A. M. O Brincar como um modo de ser e estar no mundo. **In:** BEAUCHAMP, J.; PAGEL, S. D.; NASCIMENTO, A. R. do. (Orgs.) **Ensino Fundamental de nove Anos:** orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007. p. 33 – 46.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br /images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998, volumes: 1 e 2. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAGLIARI, L. C. **Alfabetização e linguística**. São Paulo: Scipione, 2009.

CARVALHO, A.M.C. et al. (Orgs.). **Brincadeira e cultura:** viajando pelo Brasil que brinca. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1992.

FERREIRO, E.; TEBEROSKY, A. **Psicogênese da língua escrita**. Tradução: Diana Myriam Lichtenstein, Liana Di Marco e Mário Corso. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1991.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

GÓES, M. C. A formação do indivíduo nas relações sociais: contribuições teóricas de Lev Vigotski e Pierre Janet. UNICAMP, Campinas – SP. **Educação e Sociedade,** ano XXI, nº 71, Julho/00, 2008, p. 116-131.

HUISINGA, J. **Homo Ludens:** o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 1996.

KISHIMOTO, T. M. **Jogos Infantis:** O jogo, a criança e a educação. 6 ed. Petrópolis: Vozes, 1999.

KUHLMANN, J. M. **Infância e educação infantil:** Uma abordagem histórica. Porto Alegre: Mediação, 2010. (5. ed atual. ortog.)

LAMONATO, M. **Investigando geometria:** aprendizagens de professoras da Educação Infantil. 2007, 245f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática**. 3. ed. Campinas: Ed. Autores Associados, 2011.

MELO, Luciana; VALLE, Elizabeth. O brinquedo e o brincar no desenvolvimento infantil. **Psicologia Argumento**, Curitiba, v. 23, n. 40, p. 43-48, jan./mar. 2005.

REAME, E.; RANIERI, A. C.; G., Liliane; MONTENEGRO, P. **Matemática no dia a dia da Educação Infantil:** rodas, cantos, brincadeiras e histórias. São Paulo: Livraria Saraiva, 2012.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. **Figuras e formas:** matemática de 0 a 6. Porto Alegre: Artemed, 2003.

SMOLE, K.S; Diniz, M.I. Quebra-cabeças: Um recurso para ensinar e aprender geometria na Educação Infantil. Curitiba. **Revista Aprender** – Ano 1 - Nº 02 – setembro/outubro de 2000. Editora Hoper.

ZILBERMAN, R. **A Literatura infantil na escola**. 6. ed. São Paulo: Global, 1987.

CAPÍTULO 17

EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM SALA DE AULA – APLICABILIDADE DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Data de aceite: 01/03/2022

Fernanda Gonzalez Anhõn
Instituto Tratos

André Ribeiro da Silva
Universidade de Brasília

RESUMO: A Matemática Financeira pode ser simplificada como a utilização de métodos matemáticos para assuntos financeiros e estuda variáveis como os juros, descontos, pagamentos e investimentos, enquanto a educação financeira pode ser resumida como aprender a usar o dinheiro de forma inteligente. Este trabalho busca apresentar a matemática financeira como ferramenta para a gestão financeira em situações cotidianas, analisar a aplicabilidade de conceitos de matemática financeira na gestão das finanças pessoais, abordar a importância da educação financeira nas escolas e verificar a relevância do planejamento financeiro pessoal. No Brasil, a deficiência da educação financeira reflete sobre como as pessoas lidam com o dinheiro, sendo um bom exemplo o cenário de endividamento de grande parte da população, que atinge não apenas a parte financeira e gera sentimentos de angústia, ansiedade e pode prejudicar o desempenho do cidadão nos estudos e trabalho. Não há obrigatoriedade do ensino destes conceitos nas escolas, mas os planos curriculares apontam alguns assuntos em matemática e tecnologias com relação ao tema, o que leva vários professores e pesquisadores a desenvolver projetos publicados como artigos, dissertações ou teses. Pesquisas apontam que apenas um em cada três adultos do mundo possuem letramento financeiro satisfatório para gerir seu dinheiro de maneira adequada. O planejamento financeiro pessoal tem relação direta com conhecimentos de matemática e estatística. Esta gestão financeira colabora para a formação de cidadãos críticos e independentes e para a organização da família afim de traçar metas de consumo realistas, o que melhora a qualidade de vida de todos.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática Financeira; Educação Financeira; Escola.

ABSTRACT: Financial Mathematics can be simplified as using mathematical methods for financial matters and studying variables such as interest, discounts, payments and investments, while financial education can be summarized as learning to use money intelligently. This work seeks to present financial mathematics as a tool for financial management in everyday situations, analyze the applicability of financial mathematics concepts in personal finance management, address the importance of financial education in schools and verify the relevance of personal financial planning. In Brazil, the deficiency of financial education reflects on how people deal with money, a good example being the indebtedness scenario of a large part of the population, which affects not only the financial part and generates feelings of anguish, anxiety and can harm the citizen performance in studies and work. There is no obligation to teach these concepts in schools, but the curricular plans point out some issues in mathematics and technologies related to the

topic, which leads several professors and researchers to develop published projects such as articles, dissertations or theses. Surveys show that only one in three adults in the world have satisfactory financial literacy to manage their money properly. Personal financial planning is directly related to knowledge of mathematics and statistics. This financial management contributes to the formation of critical and independent citizens and to the organization of the family in order to set realistic consumption goals, which improves everyone's quality of life.
KEYWORDS: Financial Mathematics; Financial Education; School.

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento social de uma população está intimamente ligado ao desenvolvimento econômico da região onde essa população habita. O governo disponibiliza crédito ao visar aumento da produção em resposta ao aumento do consumo. O crédito fácil transformou o conceito do que é realmente necessário, o que gera problemas ambientais e financeiros. Alguns hábitos de consumo criam na população uma sensação de poder e conforto, mas, com o tempo, tornam-se um problema para o equilíbrio financeiro do orçamento familiar e geram a inadimplência.

Vários trabalhos desenvolvidos em escolas de diversas regiões brasileiras mostram que o ensino de matemática financeira é deficiente, com problemas matemáticos que tendem ao imaginário ao invés de incentivar a interação do aluno com a maneira que a matemática se apresenta no mundo.

Este trabalho trata da relação entre educação financeira, matemática financeira e sua aplicabilidade em sala de aula ao procurar compreender a importância dos temas na formação do cidadão e a relação entre estas e a organização do orçamento dos alunos e sua contribuição também no orçamento familiar, ao considerar sua formação de consciência crítica e cidadã.

A Matemática Financeira pode ser simplificada como a utilização de métodos matemáticos para assuntos financeiros e estuda variáveis como os juros, descontos, pagamentos e investimentos. Sua importância para empresas é muito discutida, ao abordar redução de custos e maximização dos lucros, por exemplo, mas deve ser aplicada também na vida pessoal – preferencialmente o mais cedo possível.

A Educação Financeira pode ser resumida como aprender a utilizar o seu dinheiro da melhor forma possível, indo além de apenas economizar. Consiste em práticas com o fim de trazer qualidade de vida no momento atual e, consequentemente, no futuro ao proporcionar a construção de um planejamento financeiro que visa o bem estar. A Educação Financeira envolve além de fatores financeiros, fatores emocionais como, por exemplo, questionamentos acerca da necessidade de uma compra no momento ou o melhor jeito de fazê-la. Destarte, unida a Matemática Financeira, desempenha um papel fundamental pois pode-se aprender a lidar de forma inteligente com o dinheiro, seus ganhos e suas despesas e fazê-lo prosperar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem como objetivo nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, assim envolve orientações gerais a serem aplicadas em todo o território nacional, mas não leva em consideração os contextos específicos de cada comunidade escolar. Dessa forma, as diretrizes da BNCC devem ser adaptadas para a realidade, tendo como base o contexto da escola e dos alunos. Outros documentos a serem considerados são o Plano Político Pedagógico da escola, o Referencial Curricular Nacional para a Educação (RCN) e, no caso da educação financeira, a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF.

Dentre os objetivos deste trabalho, pode ser destacado apresentar a matemática financeira como ferramenta para a gestão financeira em situações cotidianas, analisar a aplicabilidade de conceitos de matemática financeira na gestão das finanças pessoais, abordar a importância da educação financeira nas escolas e verificar a relevância do planejamento financeiro pessoal para crianças e suas respectivas famílias.

No Brasil, a deficiência da educação financeira reflete sobre como as pessoas lidam com o dinheiro, sendo um bom exemplo o cenário de endividamento de grande parte da população. O desconhecimento sobre conceitos como capital e juros levam a fraca ou ausente organização financeira pessoal, com um descontrole entre ganhos e dívidas. Portanto, o estudo dos conceitos de Matemática Financeira e a Educação Financeira são importantes para o entendimento de variáveis econômicas que podem contribuir para uma gestão consciente dos orçamentos das pessoas e de famílias.

Este artigo foi elaborado a partir de pesquisa bibliográfica, na qual foram explorados livros, artigos e monografias relacionados ao tema e publicados entre os anos de 2011 e 2021, além de livros e artigos internacionais. A partir da leitura dos resumos dos trabalhos encontrados, o critério de inclusão de publicações foi à relevância diante do tema proposto, artigos na íntegra e artigos na língua portuguesa. A extensão dos estudos levou a consulta de conteúdos de sites como Serviço de Proteção ao Crédito (SPC) Brasil, Portal de Periódicos Capes, Google Acadêmico e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, são introduzidos dados sobre finanças pessoais dos brasileiros, os principais fundamentos da Matemática Financeira, seguidos de abordagem sobre o que é a educação financeira, finalizados com opção para aplicação de educação financeira nas escolas.

Finanças pessoais no Brasil

A área de finanças pessoais versa sobre a maneira como o indivíduo ou família administra seu dinheiro. Bitencourt (2004) afirma que as atitudes tomadas são determinadas pelo entendimento sobre os fundamentos financeiros e, portanto, os hábitos das pessoas com maior acesso à educação financeira são diferentes das que não o possuem,

complementado por Martins (2004), que sugere que a incapacidade de ler e entender demonstrações financeiras é responsável por fracassos e erros que podem ser fatais.

Segundo pesquisas da Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas (CNDL)/ SPC Brasil (2019), os dados são alarmantes: 48% dos brasileiros não controlam o próprio orçamento e dentre as que adoram alguma medida de controle, apenas 33% planeja o mês com antecedência e o erro mais comum é de subestimar o impacto de pequenos gastos no orçamento.

Apesar de 49% dos brasileiros registrarem intenção de guardar dinheiro em 2020 e 27% almejarem tirar as finanças do vermelho, 33% dos consumidores mantiveram a intenção de comprar presentes no natal de 2019, mesmo com contas em atraso. Além disso, apenas 11% dos indivíduos têm condições de pagar as despesas de início de ano. Em março de 2020, o total de inadimplentes negativados atingiu 61,88 milhões, o equivalente a 39,45% da população adulta (CNDL/SPC, 2020)

Diariamente são tomadas decisões sobre consumo e economia que têm diversos efeitos além da vida financeira: 82% dos brasileiros com contas em atraso há pelo menos três meses têm sentimentos de angústia, ansiedade, estresse e vergonha, um terço admitiu desatenção e queda de produtividade em trabalho e estudos pelo mesmo motivo (CNDL/ SPC, 2019).

Kistemann Júnior (2011) fala sobre o consumo e a velocidade do surgimento de novos itens na sociedade capitalista moderna, atribuindo a esta algumas características como o consumo de massas, a moda em velocidade, mercadorias descartáveis, o sentimento de insaciabilidade, e o principal: o indivíduo consumidor como personagem central numa comunidade centrada no capital. Tais hábitos de consumo do século XXI contribuem para o endividamento das pessoas, além do atual fluxo acelerado de dados e uma mídia publicitária que associa consumo a bem estar (WISNIEWSKI, 2011). Conhecimentos de matemática financeira e estatística podem instigar os indivíduos a refletir criticamente sobre a sociedade e o consumo, resultando numa gestão financeira pessoal adequada, sendo esta:

> "[...] o processo de gerenciar seu dinheiro com o objetivo de atingir a satisfação pessoal. Permite que você controle sua situação financeira para atender necessidades e alcançar objetivos no decorrer da vida. Inclui programação de orçamento, racionalização dos gastos e otimização de investimentos" (MACEDO JÚNIOR, 2010, p. 26)

Desde cedo as crianças são expostas a conteúdo publicitário e sentem necessidade de possuir coisas numa sociedade baseada em consumo. De acordo com Carvalho (2000) a publicidade é a indústria dos sonhos que não são próximos da vida real, distorcendo a visão da sociedade para os consumidores. Assim, não há idade específica para a importância do aprendizado de gestão de finanças.

Matemática financeira

A constituição da sociedade teve o comércio como um dos pilares, inicialmente com a troca de mercadorias. Com o passar do tempo, percebeu-se a dificuldade de trocar as coisas – um boi por uma ovelha, por exemplo, não seria ideal – então foram estipuladas relações como um boi correspondendo a 3 ovelhas, por exemplo, numa relação 1 para 3 (HORIGUTI; DONADEL, 2010). Assim, os conceitos de razão, proporção, porcentagem e regra de três são a base do estudo.

Razão é o quociente de dois números, utilizada principalmente para comparações matemáticas entre duas grandezas, enquanto a proporção representa razões diferentes com o mesmo resultado. Porcentagem é usada para representar partes de um todo e significa a razão entre um número e 100, representada pelo símbolo %. A regra de três é importante para solução de problemas onde algum dos valores não é conhecido e utiliza relações de proporcionalidade (HORIGUTI; DONADEL, 2010)

A partir do crescimento e evolução dos mercados os meios de troca convergiram para moedas. Após isso, foi verificada a necessidade de pagamentos após certo prazo, empréstimos, entre outras operações e com isso, a matemática financeira. (METRI, 2012).

Os conceitos da Matemática Financeira estão relacionados a várias situações cotidianas, desde uma compra em um supermercado, até situações mais complexas, como aplicações financeiras (DUARTE et al., 2012). Consiste na aplicação de conceitos matemáticos para a análise de dados financeiros em geral. Em complemento, de acordo com Puccini (2016):

> A Matemática Financeira é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo; para isso, cria modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo. (PUCCINI, 2016, p. 11).

Através do estudo dos conceitos de matemática financeira, é possível calcular a taxa de juros de um empréstimo, analisar vantagens de compras à vista ou a prazo, entre outras operações. Alguns conceitos precisam ser estabelecidos para um melhor entendimento: capital, juros, taxa de juros, prazo e fluxo de caixa.

O capital é o valor inicial de uma operação financeira expresso em unidades monetárias, ou seja, é o valor do dinheiro no momento atual (PUCCINI, 2016). Já o conceito de juros pode ser entendido como o custo para uso do dinheiro alheio, ou seja, é um rendimento para o credor, como um recebimento “de aluguel” pelo dinheiro emprestado (DANTE, 2000). O montante é a soma do capital e do juro acordado, sendo esta a equação básica da matemática financeira. Por exemplo, ao aplicar uma certa quantia – capital – numa poupança por um determinado tempo, é como se o aplicador emprestasse ao banco o seu dinheiro. No final do intervalo de tempo, recebe uma quantia como compensação – juros.

Os juros podem ser simples, quando os juros são calculados sobre o capital inicial, e os juros compostos, calculadas sobre o montante, representado pelo capital somado aos juros já pagos (HORIGUTI; DONADEL, 2010). O fluxo de caixa como instrumento que representa as entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo.

Educação Financeira

Segundo a Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico (OCDE) a Educação Financeira é:

> "[...] processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e dos produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação claras, adquiram os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos neles envolvidos e, então, façam escolhas bem informados, saibam onde procurar ajuda, adotem outras ações que melhorem o seu bem-estar, contribuindo, assim, de modo consistente para formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro" (OCDE, 2005 *apud* FERREIRA, 2015, p. 84).

Algumas decisões financeiras representam grande impacto sobre a vida, portanto uma prática financeira consciente é determinante na realidade de uma comunidade inteira. No Brasil, quanto às escolas, não há obrigatoriedade do ensino da Educação financeira, porém a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) de 1996 representou um marco importante ao definir os objetivos da educação básica e declarar que "A educação escolar deve vincular-se ao mundo do trabalho e a prática social." (BRASIL, 1996, Art. 1.§2º). Utilizando a LDB como base foram formulados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como uma referência de qualidade para a educação ao indicar o que precisa ser garantido a todos através de propostas flexíveis, respeitando as diversidades de cada região do país, para formação de cidadão crítico preparado para a vida em comunidade e mercado de trabalho (BRASIL, 1999). O documento é dividido em Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio.

A matemática financeira é brevemente abordada nos PCN: para o terceiro e quarto ciclos, sugere que os alunos aprendam a se posicionar criticamente diante do consumismo e aspectos ligados aos direitos do consumidor que precisam da Matemática para serem compreendidos (BRASIL, 1998). No ensino médio o tema 1 - álgebra, números e funções – cita e destaca a importância de relacionar o ensino da matemática financeira ao cotidiano dos alunos, enquanto outra versão de PCN na área de números e operações indica a necessidade de capacitar os estudantes a:

> " [...] operar com frações, em especial com porcentagens;[...] Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar

modalidades de juros bancários. (BRASIL, 2000, p.71)

Em 2016 a segunda versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) avançou no tratamento do tema, agora inserido em todas as séries do ensino fundamental II e na maioria das unidades curriculares do ensino médio, além de trazer *Consumo e Educação Financeira* como tema a ser trabalhado de forma interdisciplinar com várias áreas – o que propicia a retomada de tópicos relacionados à matemática financeira (BRASIL, 2016). Quanto às universidades, não foi encontrado nenhuma indicação sobre o tema, o qual fica restrito apenas a cursos específicos como administração, economia e ciências contábeis, por exemplo.

Nos últimos 10 anos, de acordo com pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), foram elaboradas 1430 dissertações e 390 teses sobre educação financeira em diversos programas de pós graduação brasileiros, além de 1513 artigos relacionados ao tema publicados segundo o Portal de Periódicos da CAPES. Estes dados mostram o interesse de professores e gestores educacionais no tema, ao mesmo passo que demonstram as dificuldades encontradas, destacando-se a dificuldade dos conceitos serem colocados em prática pelos alunos por não conseguirem relacionar tais conhecimentos com o ambiente no qual estão inseridos. As pesquisas voltadas para o tema são recentes e a maior parte está relacionada à discussão de gestão de patrimônio, não havendo muitas análises do ponto de vista de educadores. Assim, verifica-se que este precisa ser inserido na escola desde as séries iniciais.

A maioria dos trabalhos aborda projetos de professores para inserir os conceitos utilizando situações rotineiras da vida dos alunos e suas famílias, com resultados envolvendo interesse dos estudantes pela disciplina e geração de conteúdos base para aplicação em outras turmas. Como exemplo, o artigo de Theisen e Bezerra (2016) tem como resultado a maior facilidade de construção de conhecimento quando este é aproximado da realidade, pois sua abordagem em sala de aula permitiu, inclusive para alunos que afirmavam não poder participar da gestão de contas em casa pois o pai sempre dizia que não tinha dinheiro ou alunos que ouviam apenas os pais dizerem que fazem “milagres com o salário”, um desenvolvimento de consciência em relação aos recursos econômicos familiares.

Souza e Flores (2018) analisam a história do ensino de matemática financeira a partir de livros didáticos e concluem que a abordagem dos livros das décadas de 50 e 60 priorizam sistema monetário enquanto na atualidade a abordagem tem maior foco sobre o desempenho das pessoas como consumidores, a fim de manter a ordem econômica e social.

Quintana e Pacheco (2018), ao analisar a percepção de estudantes do ensino fundamental sobre educação financeira percebem que poucos alunos participam do planejamento do orçamento de suas famílias e verificam a importância que isto aconteça para que os alunos tenham familiaridade com o assunto. Além disso, observa-se que

quanto as habilidades financeiras, as crianças estão despreparadas para tomar decisões conscientes.

O desenvolvimento da economia e crescente número de pessoas acessando serviços financeiros empréstimos, poupanças, investimentos, seguros, planos de pensão, entre outros, exigem a melhora do grau de educação financeira da população.

A partir disso, foi criada a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) pelo Decreto Federal 7.397/2010 para fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes - o que comprar, qual a melhor maneira e porque comprar (BRASIL, 2010). Diversos programas são apresentados na plataforma online para proporcionar a educação financeira e previdenciária, fornecendo instrumentos para o cidadão escolher conscientemente como administrar seus recursos.

O Banco Central do Brasil (BCB) participa da ENEF, além de ter o Programa Cidadania Financeira, que aborda em três frentes: i) gestão de finanças pessoais, ii) relacionamento do cidadão com o Sistema Financeiro Nacional e iii) relacionamento das instituições financeiras com o cidadão. Dentre as abordagens utilizadas, estão vídeos, publicações, cursos online e ações educacionais no Museu de Valores do BCB (BCB, 2012)

Uma das pesquisas mais abrangentes sobre educação financeira, a S&P Global Financial Literacy Survey, da Universidade George Washington (EUA), apura o conhecimento a partir de quatro conceitos básicos: diversificação de riscos (múltiplos investimentos), inflação, conhecimento numérico e juros compostos ao entrevistar mais de 150 mil adultos em mais de 140 países. Como pode ser visto na figura 1, observando todo o mundo apenas cerca de 33% dos adultos são considerados financeiramente letrados: 3.5 bilhões de adultos, a maior parte em economias em desenvolvimento. Para o Brasil há cerca de 35% de adultos com conhecimentos financeiros adequados (KLAPPER;LUSARDI; VAN OUDHEUSDEN, 2015).

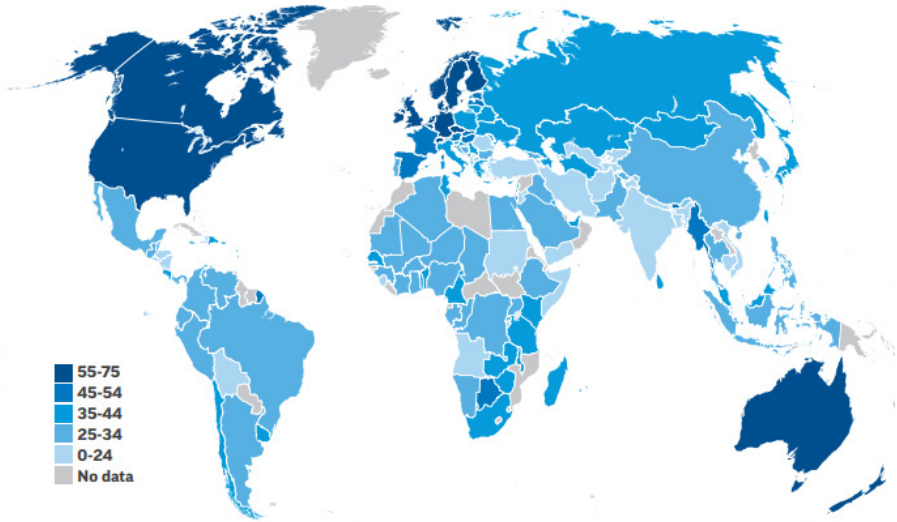


Figura 1 - variações globais em letramento financeiro

Fonte: Klapper; Lusardi; Van Oudheusden, 2015

Para Vital (2014) a matemática financeira é uma ferramenta importante, mas não é a única variável determinante para a educação financeira, sendo esta fruto de conhecimentos matemáticos e estatísticos aplicados ao dia a dia, adequando-os sempre da melhor maneira para cada realidade pessoal.

Aplicação da educação financeira nas escolas

Alguns trabalhos destacam possibilidades interessantes para a inserção de conteúdos de educação financeira nas escolas. Vital (2014) apresenta um conjunto de atividades criadas para estimular os estudantes a não apenas analisar mas, também, discutir sobre inflação de preços. Theodoro (2010) apresenta uma experiência de ensino de matemática e educação financeira para o ensino médio através de abordagem de "temas abertos" como consciência, organização, orçamento, pesquisa, controle, metas e investimento e concluiu que após o trabalho, além dos estudantes, pais e professores passaram a observar melhor seus gastos.

Para Júnior (2016) a visão de ensino quanto à educação financeira precisa ter como alicerce uma visão multidisciplinar baseada no convite à reflexão, conexão didática e dualidade, onde a riqueza da sala de aula é manifestada a partir dos discursos emergentes dos estudantes, produção e articulação de conhecimentos quanto às questões financeiras e a forma de lidar diante de conceitos como juros, inflação, dentre outros conceitos básicos de matemática financeira.

Cunha e Laudares (2017) apresentam artigo sobre resolução de problemas de matemática financeira para promoção da educação financeira no ensino médio e conclui

através de análise de dados uma melhora contínua do comportamento dos alunos não apenas em acertos de questões mas quanto a sua postura reflexiva acerca destas.

Um modelo simples a ser utilizado para crianças do ensino fundamental é a criação de um jogo de compra e venda. As crianças protagonizam seu aprendizado ao criar uma moeda e escolher objetos que elas compram por um determinado valor e depois tentam vender por um valor diferente, assim podem ter noção desde operações matemáticas básicas até lucro e consciência de quanto podem gastar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os temas relacionados à matemática e educação financeira foram muito utilizados tanto na publicação de artigos quanto na elaboração de dissertações e teses. A maior parte das pesquisas acadêmicas mostram o esforço para entender as necessidades dos indivíduos e colocar projetos em prática afim de ajudar a população, em vários níveis de escolaridade, a conhecer melhor os conceitos matemáticos e econômicos, incluindo a sua aplicação no cotidiano de suas famílias.

O maior fluxo de informações, a sociedade focada no consumo e o maior acesso ao crédito são alguns dos fatores que mostram que as ferramentas de matemática financeira não são de uso exclusivo dos administradores e gestores de empresa. Entretanto, a educação financeira não pode ser resumida ao ensino de artifícios prontos sobre como administrar o dinheiro, mas sim para criar uma mentalidade adequada e saudável em relação ao bom uso do dinheiro. A escola não pode ter como preocupação exclusiva preparar os estudantes para futuros estudos, mas agir para a formação cidadã desde cedo. A formação de professores também é fator principal para contribuir com a formação mais ampla dos alunos.

O planejamento financeiro, além de colaborar para a formação de cidadãos críticos e independentes, colabora para a organização da família afim de traçar metas de consumo realistas, favorecendo possibilidades de investimento na qualidade de vida dos indivíduos.

REFERÊNCIAS

BANCO CENTRAL DO BRASIL (BCB). Cidadania financeira. 2012. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/programa_cidadania_financeira.pdf Acesso em 11/11/2021.

BRASIL. Decreto Federal 7.397, de 23 de dezembro de 2010**.** Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF. Diário Oficial da União**:** seção 1, Brasília, DF, p. 8, 23 dez. 2010.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, p. 27833, 20 dez. 1996.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Brasília, DF: MEC, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática : Ensino Médio; Brasília, DF: MEC, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Base Nacional Comum Curricular. 2a versão. Brasília, DF: Ministério da Educação e Cultura, 2016.

CARVALHO, N. Publicidade : a linguagem da sedução. 3ªed. São Paulo : Ática, 2000.

DANTE, L. R.. Matemática: Contexto & Aplicações. V. 1. São Paulo : Ática, 2000.

DUARTE, P. C. X. *et al*. Matemática Financeira: um alicerce para o exercício da cidadania. Nucleus, v. 9, n. 1, p. 195-208, 2012.

FERREIRA, J. C. B., FRANCO, L. M. Didática e práticas educativas. 1 ed. São Paulo: Baraúna, 2015.

HORIGUTI, A. M.; DONADEL, J. Matemática Comercial e Financeira e Fundamentos de Estatística. 1 ed. São Paulo: Érica, 2014.

KISTEMANN JÚNIOR, M. A. Sobre a Produção de Significados e a Tomada de Decisão de Indivíduos-Consumidores**.** 2011. 540 f. Tese de Doutorado. (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, SP, 2011.

JUNIOR, I. M. Educação Financeira e a sala de aula de Matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente. 2016.

KLAPPER, L.; LUSARDI, A.; VAN OUDHEUSDEN, P. Financial literacy around the world: Insights from the Standard & Poor's ratings services global financial literacy survey. Global Financial Literacy Excellence Center, the George Washington University. 2015.

MACEDO JÚNIOR, J. S**.** A árvore do dinheiro: guia para cultivar a sua independência financeira. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MARTINS, J. P. Educação financeira ao alcance de todos. São Paulo: Fundamento Educacional, 2004.

METRI, M. Acumulação de poder, sistemas e territórios monetários: uma análise teórica sobre a natureza da moeda e sua relação com a autoridade central. Ensaios FEE, Porto Alegre, v. 33, n. 2, p. 397-422, 2012.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT – OCDE. Recommendations on principles and good practices for financial education. 2005.

PUCCINI, E. C. Matemática financeira e análise de investimentos. 3. ed. rev. atual. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; Brasília: CAPES: UAB, 2016.

QUINTANA, A. C.; PACHECO, K. V. Percepção dos estudantes do ensino fundamental sobre a educação financeira e o consumo consciente. Educação Online, v. 13, n. 27, p. 130-150, 2018.

SOUZA, J. I.; FLORES, C. R. Uma história da educação financeira na escola por meio de uma análise em livros didáticos. Revista de História da Educação Matemática, v. 4, n. 3, p. 54-67, 2018.

THEISEN, V., BEZERRA, R. C. O conhecimento da matemática financeira como fator de proteção ao direito econômico de cada cidadão. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016. Curitiba: SEED/PR., 2018. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <l http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unioeste_volneitheisen.pdf> . Acesso em 10/11/2021.

THEODORO, F. R. F. Matemática e Educação Financeira: uma experiência com o ensino médio. Revista de Educação, v. 13, n. 15, 2010.

VITAL, M. C. Educação Financeira e Educação Matemática: Inflação de Preços. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, MG, 2014.

WISNIEWSKI, M. L. G. A importância da educação financeira na gestão das finanças pessoais: uma ênfase na popularização do mercado de capitais brasileiro. Revista Intersaberes, v. 6, n. 11, p. 155-170, 2011.

CAPÍTULO 18

RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DEWEYANA E O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

Data de aceite: 01/03/2022

Lênio Fernandes Levy
Universidade Federal do Pará

Trabalho originalmente publicado no XII ENEM (XII Encontro Nacional de Educação Matemática).

RESUMO: Este trabalho voltou-se para a filosofia pragmatista de John Dewey e para a utilização de jogos em aulas de matemática. Tratou-se de uma pesquisa teórico-bibliográfica de cunho qualitativo, norteada pelo seguinte objetivo: *identificar relações entre a filosofia deweyana e o uso de jogos no ensino de matemática*. Buscou-se enfatizar os inevitáveis desafios que os indivíduos enfrentam por ocasião de suas (também inevitáveis) interações com o mundo externo e/ou com a realidade, podendo-se, em alguma medida, considerar os jogos como um tipo de realidade, bem como a realidade como um tipo de jogo, num processo em que realidade, jogos e indivíduo (Obs.: admitindo-se este último inserido na realidade e nos jogos, mas, ao mesmo tempo, contrapondo-se à realidade e aos jogos, em função da própria essência da realidade, dos jogos e do indivíduo) modificam-se permanentemente, dadas as suas ingerências mútuas. Deparar-se com uma situação-problema; imaginar hipóteses que possam solucioná-la; testar as hipóteses imaginadas; decidir favoravelmente (ou não) à hipótese testada; retomar parte do processo se o problema não for solucionado etc.: eis aí procedimentos inalienáveis ao diálogo entre homem e mundo, e/ou procedimentos inalienáveis ao vínculo que, no jogo, observa-se entre as pessoas (ou entre as partes) envolvidas. Viver é jogar; jogar é viver; viver-jogar é investigar.

PALAVRAS-CHAVE: Filosofia. Pragmatismo. John Dewey. Jogos. Ensino. Matemática.

ABSTRACT: This work turned to the pragmatist philosophy of John Dewey and to the use of games in mathematics classes. It was a theoretical-bibliographic research of a qualitative nature, guided by the following objective: *to identify relationships between deweyan philosophy and the use of games in the teaching of mathematics*. We sought to emphasize the inevitable challenges that individuals face during their (also unavoidable) interactions with the external world and/or with the reality, and it is possible, to some extent, to consider games as a type of reality, as well as reality as a kind of game, in a process in which the reality, the games and the individual (Note: admitting the latter as part of the reality and of the games, but at the same time opposing reality and games, a fact that depends on the very essence of the reality, the games and the individual) are permanently modified, given their mutual interference. To face with a problematic situation; to imagine hypotheses that might solve it; test the imagined hypotheses; decide favorably (or not) to the tested hypothesis; resume part of the process if the problem is not resolved, etc.: here are procedures inalienable to the dialogue between man and the world, and/or procedures inalienable to the bond that, in the

game, is observed between the people (or between the parties) involved. Living is playing; playing is living; living-playing is to investigate.
KEYWORDS: Philosophy. Pragmatism. John Dewey. Games. Teaching. Mathematics.

1 I INTRODUÇÃO

Consideramos a viabilidade, em geral, de as tendências metodológicas atinentes aos processos didáticos serem abordadas mediante prismas filosóficos os mais diversificados. Ao fazermos menção à utilização de jogos em aulas de matemática, defendendo a sistematização de tal processo aliada ao pragmatismo deweyano, não descartamos outros pressupostos filosóficos no que se refere a esse tipo de utilização ou de atividade. Parece-nos, todavia, digno de nota o desenrolar histórico-filosófico que redundou no ideário do renomado filósofo norte-americano (obviamente precedido, em se tratando da seara maior a que se dá o nome de pragmatismo, por dois de seus compatriotas, igualmente consagrados: Charles Sanders Peirce e William James) e/ou que resultou naquilo que – utilizando-se um vocábulo de significado talvez mais abrangente – é nomeado de construtivismo, e, sobretudo, parece-nos digno de nota o relevo das influências acarretadas pelas citadas linhas de pensamento (pragmatista e/ou construtivista) sobre algumas tendências metodológicas levadas a cabo em atividades formadoras (escolares), a exemplo dos jogos.

Joga-se desde tempos imemoriais. Apesar de os jogos haverem penetrado mais intensamente no universo da educação formal somente no transcurso das últimas décadas, eles nunca deixaram de constituir-se em subsídio de práticas didáticas as mais longínquas no que tange à linha temporal. Mostra-se necessária, a nosso ver, a compreensão da sistematização, a partir do ideário deweyano, a que podemos submeter atividades lúdicas e levá-las a efeito no universo escolar, embora saibamos que não haja empecilhos – reiteramos! – para que façamos algo semelhante através de fundamentos propiciados por outras teorias filosóficas. O diferencial, aqui, em nosso entendimento, é a contribuição capital e efetiva do pragmatismo no sentido do uso sistematizado de atividades lúdicas no contexto escolar. Queremos crer que os indicadores históricos falem em nosso favor quanto a isso.

O ser humano dialoga de modo inevitável com o meio que o cerca, e ambos, homem e ambiente, modificam-se ao modificarem um ao outro durante esse diálogo, *durante esse enfrentamento, durante esse jogo*. Grosso modo, encontramos em tal asserção os pilares do pensamento de John Dewey, por intermédio do qual esse filósofo, psicólogo e pedagogo contribuiu para que a dicotomia que afastava (e que, de certa maneira, ainda afasta) racionalismo de empirismo perdesse uma parcela significativa de sua força.

Na presente investigação, objetivamos *identificar relações entre a filosofia deweyana e o uso de jogos no ensino de matemática*. Para tanto, discorremos acerca da citada corrente filosófica e a propósito dos jogos, em geral, e de seu uso, em particular, no ensino,

com destaque a aulas de matemática. Em nosso movimento argumentativo, intentamos levar o leitor a perceber o quanto de jogo há na vida, na realidade e/ou no contato entre homem e vida/realidade, e a perceber o quanto de pragmatismo (deweyano) há ou pode haver, em termos de sistematização, no uso de jogos em âmbito escolar.

2 | JUSTIFICATIVAS

A nosso ver, procedimentos metodológicos, entre eles os que são voltados para a área de Ensino, valem-se de (ou relacionam-se com) pressupostos, notadamente filosóficos, com vistas a uma fundamentação, preferencialmente argumentativa ou lógica, e a uma respectiva aceitação acadêmica. Não podemos negar, todavia, que, em se tratando de tendências metodológicas, incluso aí o contexto da educação matemática, torna-se às vezes difícil saber (i) se uma tendência denota repercussão, na área de Ensino, de certa corrente filosófica ou (ii) se determinada corrente filosófica é clamada para fundamentar uma tendência metodológica pré-existente. Embora consideremos vigorosamente a primeira alternativa, cremos ser igualmente aceitável (ou, no mínimo, achamos que não esteja fora de cogitação) um processo recursivo, quer dizer em se tratando dessas alternativas, pensamos que seja plausível a existência de uma *via de mão dupla*, em que a causa gera o efeito que gera ou regenera a causa.

Escolhemos como tema de estudo *o uso de jogos no ensino de matemática* e admitimos a asserção de que a referida tendência metodológica é passível de apresentar-se subsidiada por (e/ou vinculada a) correntes filosóficas, sendo que, assumindo um posicionamento relativamente prévio, poderíamos asseverar a importância do movimento *pragmatista/construtivista deweyano* nesse sentido, porquanto (entre outros fatores), assim como (em tese) os jogos, tal movimento assume como fundamento, em termos educacionais, a necessidade constante de o indivíduo reformular-se ou transformar-se. A propósito:

> (...) Na concepção deweyana, educar não é um mero procedimento pelo qual se instrui as crianças para que reproduzam determinados conhecimentos. Educar é pôr o indivíduo em contato com a cultura a que pertence e, mais do que isto, é prepará-lo para discernir situações que exijam reformulações e para agir em consonância com estas necessidades de transformação (CUNHA, 1994, p. 38).

O nosso objetivo de pesquisa constitui-se / constituiu-se em: *identificar relações entre a filosofia deweyana e o uso de jogos no ensino de matemática*.

Cremos que o presente estudo também se justifique pela crescente necessidade de motivar ou estimular o alunado no que tange à aprendizagem matemática. Por sinal:

> (...) Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se

deseja desenvolver (BRASIL, 2000, p. 49).

Tal motivação/estímulo, sustentando-se em ou ligando-se a pressupostos filosóficos plausíveis (não separados, naturalmente, de princípios sociológicos e psicológicos), tenderá a produzir, de nosso ponto de vista, resultados mais eficazes. Além disso, uma investigação que focalize a possibilidade de citado aspecto (o filosófico) constituir-se em base de (ou em algo ligado a) ações, na educação matemática, que sejam voltadas (total ou parcialmente) para o *uso de jogos no ensino de matemática*, permitir-nos-á ter alguma competência (evidentemente conseguida, sobretudo, a partir do material de estudo de que dispusermos) para recomendarmos, no ensino de matemática, o *trabalho com jogos* de modo filosoficamente consciente/sistematizado.

3 | METODOLOGIA

Em nossa pesquisa, não buscamos generalizações de modo veemente. Estudamos casos particulares em que a singularidade do diálogo entre sujeito e objeto não foi desconsiderada. A pesquisa que propusemos constituiu-se num processo de cunho qualitativo. A propósito:

> A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva (MORESI, 2003, p. 9).

"A pesquisa bibliográfica é aquela que se efetiva tentando-se resolver um problema ou adquirir conhecimentos a partir do emprego predominante de informações provenientes de material gráfico, sonoro ou informatizado" (PRESTES, 2003, p. 26). Realizamos uma investigação teórico-bibliográfica, inserida no paradigma qualitativo ou interpretativista, o qual, além do mais, caracteriza-se pelo investigador na condição de instrumento principal, dizendo respeito (esse paradigma, qual seja o qualitativo ou interpretativista) também a investigações descritivas e voltadas, acima de tudo, para processos indutivos.

No paradigma qualitativo ou interpretativista, o significado atribuído ao objeto de estudo pelo sujeito investigador é algo de vital importância. "Segundo o paradigma interpretativista, surgido como uma alternativa ao positivismo, não há como observar o mundo independentemente das práticas sociais e significados vigentes" (BORTONI-RICARDO, 2008, p. 32).

4 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 A filosofia deweyana

A filosofia pragmatista é largamente caracterizada pela atitude mental. Entre seus fundamentos, relacionamos: (i) a indivisibilidade dos elementos da díade pensamento-ação,

o que significa considerar qualquer elaboração teórica como uma hipótese que necessite de demonstração prática; (ii) o distanciamento entre a realidade e sistemas acabados/ imutáveis, haja vista a permanência das transformações sociais; (iii) a capacidade da inteligência para modificar as condições das experiências vividas pelo homem (CUNHA, 1994).

No pensamento deweyano, é fundamental a ideia de que o organismo não se mantém passivo e imóvel, à mercê de impressões advindas do exterior. Em vez disso, ele atua sobre o meio ambiente, subsidiado pela sua própria estrutura, simples ou complexa. A seu turno, o ambiente transformado pelo sujeito retroage sobre ele.

A localização do indivíduo no âmbito da interação entre si próprio e o meio que o envolve denota uma continuidade entre os aspectos biológico e cultural do homem. Por oportuno:

> O ser biológico, com suas características peculiares herdadas, vai sendo moldado pelo meio social e tendo que se acomodar ao ambiente em que vive. Essa acomodação, porém, não é passiva; o homem não recebe as configurações culturalmente determinadas como se um molde se impusesse sobre ele; pelo contrário, vai modificando, pouco a pouco, as injunções do meio e adequando-as às suas necessidades (CUNHA, 1994, p. 30-31).

A procedência e a função da filosofia, de acordo com o pensamento deweyano, são civilizadoras, e isso se verifica na educação com igual intensidade, de tal modo que, em se tratando do ideário deweyano, as finalidades da filosofia e da educação relacionam-se estreitamente.

Para Dewey, educar não é despertar capacidades adormecidas no indivíduo para a consecução de fins previamente determinados, tampouco é impregnar o educando com elementos do mundo externo. A educação não visa à adequação mecânica do estudante às necessidades da esfera social nem objetiva mantê-lo simplesmente a par de informações do passado que não guardem liames com o presente. Dewey sugere a educação como uma permanente recriação ou reorientação da experiência, aplicando-se tal recriação à própria experiência do momento presente (CUNHA, 1994).

Dewey assevera que não somos meros observadores de antecipações de resultados, e sim pessoas engajadas na respectiva consecução, o que nos torna, então, partícipes ativos do processo que conduz aos resultados. Nossa intervenção acarreta este ou aquele resultado. Para ele:

> Um objetivo representa o resultado de qualquer processo natural trazido à consciência e transformado em importante fator para determinar a observação presente e a escolha de modos de ação. Significa que uma atividade se tornou inteligente. Especificamente, é a previsão das conseqüências alternativas que auxiliam a ação, de distintas maneiras, em certa situação, bem como o uso do que é antecipado, no intuito de direcionar a observação e o experimento. Assim, um verdadeiro objetivo opõe-se integralmente a um objetivo que é imposto de fora de um processo de ação. Este último é fixo e rígido; não é um

> estímulo à inteligência na situação dada, mas uma ordem ditada externamente para fazer tais e tais coisas (DEWEY, 2007, p. 27).

Na condição de participante ativo do mundo em que está inserido, o ser vivo experimenta-o, e um tipo de participação essencial é o conhecimento, entendido como algo efetivo, a julgar por tal participação. O conhecimento é ativo/efetivo na medida em que o espectador não é desinteressado.

Na concepção de Dewey, o conhecimento organiza-se ante um problema em que estão envolvidos o indivíduo e o ambiente, ante um problema que congrega o intelecto reflexivo e as impressões originadas no ambiente externo. O intuito do conhecimento é galgar possibilidades sistematizadas para que haja intervenções na realidade, adequando, assim, indivíduo e meio externo (DEWEY, 2007). Pensando dessa forma, Dewey põe em xeque a dicotomia gerada pelas teorias do conhecimento.

4.2 Os jogos

A educação matemática ora surge e se consolida como um corpo de estudos e de investigações, por vezes interdisciplinares, voltado sobremaneira para a criação e para o desenvolvimento de procedimentos visando à motivação discente aliada a uma formação cidadã, bem como ao aperfeiçoamento docente direcionado para o senso crítico e/ou para a investigação. Nesse sentido:

> Estudos modernos sobre ciência em geral têm nos ensinado que a pesquisa científica sempre está vinculada a uma ou outra pressuposição de ordem ontológica e/ou epistemológica. Não poderia ser diferente com a Educação Matemática. Assim, essa área da Educação tem se estruturado através de algumas tendências, amparadas em várias concepções filosófico-metodológicas, que norteiam o pesquisador na sua busca de um ensino mais eficaz (MENDES, 2006, p. 15-16).

Muitas ideias pedagógicas desenvolveram-se no transcurso do século XX mediante contribuição de ciências humanas, realçando a postura ativa do aluno na construção do seu conhecimento e da sua cidadania. As pedagogias centradas na aprendizagem não se restringem à aquisição de conteúdo; valorizam, em especial, os processos de aprendizagem protagonizados pelos alunos. A propósito:

> As atuais propostas pedagógicas, ao invés de transferência de conteúdos prontos, acentuam a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa, a construção dos conhecimentos para o acesso ao saber. As aulas são consideradas como situações de aprendizagem, de mediação; nestas são valorizados o trabalho dos alunos (pessoal e coletivo) na apropriação do conhecimento e a orientação do professor para o acesso ao saber (MICOTTI, 1999, p.158).

Entre as tendências metodológicas emergentes e que se têm mostrado eficazes para a solução de alguns obstáculos encontrados pelos educadores matemáticos, citamos: o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática; a etnomatemática; a

resolução de problemas; a modelagem matemática; a história da matemática; o uso de computadores e calculadoras no ensino de matemática (MENDES, 2006).

De certa forma, não somos impedidos de admitir que a sociedade constitua-se num jogo, o qual seria o pressuposto de toda a civilização. Sem ludicidade, a civilização tornar-se-ia inviável.

> Huizinga, em Homo Ludens (1980), defende a ideia de que o jogo puro e simples constitui as bases da civilização. "Num sentido puramente formal poderíamos considerar toda a sociedade como um jogo, sem deixar de ter presente que este jogo é o princípio vital de toda a civilização. A conclusão é de que sem o espírito lúdico a civilização é impossível" (p. 28) (EMERIQUE, 1999, p. 187).

No universo educacional, o jogo, em termos de sistematização, desenvolveu-se lentamente, havendo ingressado tardiamente na escola.

Por definição, o jogo é uma atividade exercida livremente, com delimitações espaciais e temporais, obedecendo a regras previamente consentidas, mas inexoráveis, cujo fim é ele próprio. Sentimentos de preocupação e de felicidade acompanham-no, ligados, porém, a uma consciência de ser distinta daquela derivada de atos corriqueiros (EMERIQUE, 1999).

O jogo não prescinde da ação, da interação e da estratégia, partindo da liberdade, do interesse e do consentimento de riscos, em contínuo processo de desconstrução/construção. O jogo, nesse sentido, não é característico somente dos anos iniciais da vida humana, mas de todo o desenvolvimento vital do homem, o qual se dá em todas as fases de sua existência.

De acordo com Emerique:

> Considerando o vínculo que abrange o pensar, o sentir e o agir, acreditamos que ao educador está posto o desafio de imaginar novas metodologias e pesquisar estratégias alternativas para uma ***ensinagem*** mais abrangente, envolvente, participativa, multidisciplinar e inserida na realidade, vendo, no lúdico, uma possibilidade de construir essa ponte entre o real e o imaginário, pois "sua função é a de representar a realidade" (Santa Roza, 1993, p. 25) (EMERIQUE, 1999, p. 188).

O uso de jogos não elimina o recurso a outros meandros didáticos. Entretanto, demanda do professor uma atitude, em geral, menos diretiva, menos controladora, demanda-lhe certo relaxamento quanto às obrigações, à rigidez das necessidades e às disciplinas cotidianas.

O homem possui capacidade para atuar livremente sobre o mundo, impulsionado pela motivação, a qual tem a ver com seus desejos, interesses e necessidades. O seu contato naturalmente lúdico com a realidade gera o conhecimento, que não é possível sem a experimentação e/ou sem a pesquisa de problemas, e isso deve ser levado a efeito com independência, com uso da imaginação a ligar pensamento, sentimento e linguagem, enfim, mediante interações com o outro e pelo outro, as quais não deixam de constituir-se em interações lúdicas (EMERIQUE, 1999).

Em suma, o jogo é uma situação amplamente afetiva, social e cognitiva, que não pode ser obrigatória quanto ao seu desencadeamento e quanto aos seus resultados. Ao mesmo tempo, o jogo representa certeza e implica certeza, na medida em que indica os limites a serem acordados e/ou ultrapassados, podendo diminuir resistências, já que solapa a inflexibilidade, os desmandos, a subserviência e o decreto, tornando as relações mais democráticas.

4.3 Os jogos nos PCN/Matemática

Além de constituir-se em um processo sociocultural no qual a matemática pode estar presente, o jogo parece ser uma atividade natural no que tange ao desenvolvimento psicológico básico. Ele pressupõe, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN/Matemática), um diálogo entre, de um lado, a ausência de obrigação e de imposição e, de outro lado, a necessidade de exigências, normas e controle (BRASIL, 2000).

No jogo, o contato entre o que se conhece e o que se imagina tende a levar, até onde é possível, ao autoconhecimento e – em termos do que se pode esperar e das respectivas circunstâncias – ao conhecimento dos outros.

Para crianças em tenra idade, os jogos equivalem a atos que elas repetem contínua e sistematicamente, dotados de um sentido funcional (jogos de exercício), ou seja, representam fonte de significados e, dessa forma, fomentam compreensão, satisfação e hábitos que se consolidam em um sistema (BRASIL, 2000). Tais reiterações funcionais devem igualmente estar presentes nos processos escolares, dada a sua importância no que concerne a auxiliar a criança a notar regularidades.

Por intermédio dos jogos, as crianças não apenas experimentam situações que se repetem, mas também aprendem a raciocinar simbolicamente e/ou por analogia (jogos simbólicos): elas começam a imaginar o que as coisas significam (BRASIL, 2000). Quando elaboram analogias, as crianças transformam-se em construtoras de linguagens e/ou de convenções, tornando-se capazes de subordinarem-se a regras, bem como de emitirem explicações.

As crianças, ao jogarem, começam a entender e a fazer uso de convenções e de regras que serão aplicadas no ensino e na aprendizagem, o que facilita sua inserção num contexto sociocultural deveras amplo e complexo, oportunizando-lhes proximidade com os primeiros esboços de teorizações. Ainda segundo os PCN/Matemática:

> Em estágio mais avançado, as crianças aprendem a lidar com situações mais complexas (jogos com regras) e passam a compreender que as regras podem ser combinações arbitrárias que os jogadores definem; percebem também que só podem jogar em função da jogada do outro (ou da jogada anterior, se o jogo for solitário). Os jogos com regras têm um aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda (BRASIL, 2000, p. 49).

Outrossim, os jogos de grupo contribuem para o desenvolvimento cognitivo, emocional, moral e social da criança, além de estimularem o seu raciocínio lógico (BRASIL, 2000). Finalmente, um aspecto importante nos jogos é o desafio que eles geram no aluno, conjugando interesse e prazer. Isso representa um argumento favorável a que o lúdico faça parte do cotidiano escolar, devendo o professor analisar e avaliar o potencial educativo dos diversos jogos, assim como os elementos curriculares que se almeja desenvolver.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

À semelhança do que é preconizado pelo ideário deweyano, a atitude mental é atributo que potencializa o lúdico. Jogar requer um constante dialogismo entre pensamento e ação, bem como a consolidação de hipóteses mediante demonstrações práticas. O jogo, tal qual a realidade, não é condizente com permanências e/ou com imutabilidades, e exige inteligência para alterar as condições de experiências vivenciadas de forma não exitosa.

No jogo, é válida a ideia de que não deve haver passividade e imobilismo diante de impressões provenientes do campo oposto. O jogador precisa adotar uma postura ativa, auxiliado pela sua aptidão, simples ou complexa, a qual é passível de desenvolvimento ou de evolução. O jogo transforma o jogador, que, por sua vez, transforma o andamento do jogo. Esses ditames coadunam-se com a teoria pragmatista de John Dewey.

Quem joga interage com o exterior, com o meio em que está inserido, o que nos remete à interação deweyana entre o indivíduo e o meio que o envolve, numa continuidade entre relações integrando os aspectos biológico e cultural do homem.

A procedência e a função do jogo, com frequência, adquirem caráter civilizador, em se tratando da seara educacional. Paralelamente, no ideário deweyano, as finalidades da filosofia (pragmatista) e da educação relacionam-se estreitamente.

Jogar não significa simplesmente reanimar capacidades paralisadas no indivíduo tendo-se em vista a consecução de metas previamente fixadas, nem significa tão somente *preencher* o jogador com elementos do processo lúdico. O jogo não objetiva a concordância automática e impensada do partícipe às regras estabelecidas nem almeja mantê-lo meramente a par de dados relativos a lances anteriores que não tenham ligações com o que se pretende no momento atual. Semelhantemente, Dewey, através de sua filosofia, sugere a educação como uma permanente recriação ou reorientação da experiência, aplicando-se tal recriação à própria experiência do momento presente.

O verdadeiro jogador não é um mero observador de antecipações de resultados, e sim alguém, em tese, empenhado no correlato alcance, o que o transforma, pois, em participante ativo do resultado galgado no processo lúdico. De acordo com Dewey e/ou com a filosofia deweyana, nossa intervenção no mundo acarreta este ou aquele resultado.

Por ser ativo no jogo de que participa, o indivíduo efetivamente o experimenta, sendo o conhecimento (ou a sua construção) uma modalidade especial de participação

do jogo, entendido (o conhecimento) como algo efetivo, haja vista tal participação. A propósito, segundo o ideário deweyano, o conhecimento é ativo/efetivo na medida em que o *espectador* não é desinteressado.

No jogo, o conhecimento desenvolve-se por conta de um problema em que estão engajados o indivíduo e aquilo/aquele a que/quem ele se opõe. Há, em função do problema ou do desafio suscitado, o apelo ao intelecto reflexivo, o qual busca destrinchar os segredos das impressões oriundas do campo oposto. De forma semelhante, para Dewey, o intento do conhecimento é gerar sistematizações possíveis a fim de que se processem ingerências na realidade, ocorrendo, então, adequações entre o indivíduo e o meio externo.

Constituindo-se num processo social e cultural em que a matemática pode estar presente, a relação entre o homem e o meio que o cerca – conforme advoga Dewey – tende a subsidiá-lo quanto ao seu desenvolvimento psicológico básico. De certa forma, essa relação nos remete ao jogo quando pressupõe, em algum grau, um diálogo caracterizado, de um lado, por determinada ausência de obrigação e de imposição, e, de outro lado, um diálogo marcado pela necessidade de exigências, de normas e de controle.

No jogo, assim como na dialógica *homem-mundo* defendida por Dewey, o contato entre o conhecido e o imaginado tende a nos conduzir, dentro dos limites possíveis, ao autoconhecimento e – no que concerne a expectativas e a circunstâncias correlatas – ao conhecimento das demais pessoas.

Crianças pequenas, em sua interação com o mundo, executam (e/ou são exortadas a executar) atos repetitivos de modo contínuo e sistemático, os quais as levam a criar significados e, por conseguinte, a desenvolverem competências relativas a compreensões, a satisfações e a hábitos. Tais reiterações funcionais, defendidas por Dewey em se tratando dos diálogos entre o indivíduo e o mundo à sua volta, são importantíssimas em jogos, devendo igualmente estar presentes nos processos escolares, em virtude da sua importância no que concerne a auxiliar crianças a notarem regularidades.

Dewey preconiza que as crianças, além do emprego de estratégias ante o inusitado, experimentem situações repetitivas, aprendendo, assim, a raciocinar simbolicamente e/ou por analogia. Quando criam analogias, as crianças passam a ser elaboradoras de linguagens e/ou de convenções que as tornam aptas a subordinarem-se a regras e a emitirem explicações, tal qual acontece com jogadores experientes.

Além disso, segundo a filosofia pragmatista, as crianças, em seu contato com o meio exterior, e à semelhança do que acontece ao participarem de jogos, começam a entender e a fazer uso de convenções e de regras que serão igualmente utilizadas no processo de ensino e de aprendizagem, o que lhes facilitará a penetração ulterior em um universo sociocultural mais complexo, onde costumam ter lugar as primeiras tentativas de teorizações.

Dewey prevê que, em ocasiões posteriores, as crianças, na sua interação com o mundo, começam a aprendizagem de situações mais complexas e passam a compreender

que as regras derivam de convenções pré-estabelecidas. Compreendem também que somente podem agir – e (por que não?) jogar – em decorrência da ação / da jogada do outro (ou da ação / da jogada anterior, quando se trata de ações / de jogadas sucessivas protagonizadas por uma só pessoa ou por um só jogador). Na vida, assim como nos jogos com regras, entender e fazer são faces da mesma moeda.

Igualmente, a convivência em grupo – da mesma forma que os jogos de grupo – subsidia a evolução cognitiva, emocional, moral e social da criança, além de reforçar o seu raciocínio lógico.

Por fim, um aspecto importante do ideário deweyano – à semelhança da vontade de vencer, estimulada pelos jogos – são os desafios que a realidade impõe ao indivíduo. Tais desafios constituem-se em argumento favorável a que a realidade – assim como o lúdico – faça parte do cotidiano escolar, devendo o professor analisar e avaliar o potencial educativo das diversas situações-problema a que pode submeter os alunos, bem como analisar e avaliar os componentes curriculares que almeja que eles desenvolvam.

REFERÊNCIAS

BORTONI-RICARDO, Stella Maris. **O professor pesquisador**: introdução à pesquisa qualitativa. São Paulo: Parábola Editorial, 2008 (Estratégias de ensino; 8).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

CUNHA, Marcus Vinícius. **John Dewey**: uma filosofia para educadores em sala de aula. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994 (Educação e Conhecimento).

DEWEY, John. **Democracia e educação**: capítulos essenciais. Apresentação e comentários de Marcus Vinícius da Cunha. Tradução de Roberto Cavallari Filho. São Paulo: Ática, 2007 (Ensaios comentados).

EMERIQUE, Paulo Sérgio. Isto e aquilo: jogo e “ensinagem” matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999 (Seminários & Debates), p. 185-198.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999 (Seminários & Debates), p. 153-167.

MORESI, Eduardo. **Metodologia da Pesquisa**. Brasília, DF, 2003. Disponível em: <http://ftp.unisc.br/portal/>. Acesso em: 22 de dezembro de 2013.

PRESTES, Maria Luci de Mesquita. **A pesquisa e a construção do conhecimento científico**: do planejamento aos textos, da escola à academia. 2. ed. São Paulo: Rêspel, 2003.

CAPÍTULO 19

ESTADOS ESTACIONÁRIOS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COM MÉTODO DE DIFERENÇA FINITA

Data de aceite: 01/03/2022

João Socorro Pinheiro Ferreira
Professor de Matemática da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP)
Doutorando do Programa de Matemática Aplicada da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
http://lattes.cnpq.br/2283642558933703
https://orcid.org/0000-0002-3711-3602

RESUMO: Este trabalho apresenta os resultados teóricos e práticos (aplicação) de como estabelecer a solução e a estabilidade de sistemas de EDO, por meio do Método de Diferença Finita (MDF), com base na fórmula centrada para a segunda derivada. Inicialmente são discutidas as condições de contorno, onde o valor da própria solução é especificado, são denominadas Condições de contorno de Dirichlet. Veremos que para estabelecer a convergência, devemos verificar se o sistema apresenta consistência e estabilidade, mas para isto ocorrer, o Erro de Truncamento Local (τ) e o Erro Global do espaço *h* devem ter acurácia (precisão) de segunda ordem no espaço, $O(h^2)$, tendo em vista que o problema aqui estudado está em uma única dimensão (direção).
PALAVRAS-CHAVE: Consistência, Estabilidade, Convergência, LeVeque, Norma-2.

STATIONARY STATES OF INITIAL VALUE PROBLEMS WITH FINITE DIFFERENCE METHOD

ABSTRACT: This paper presents the theoretical and practical results (application) of how to establish the solution and stability of ODE systems, through the Finite Difference Method (FDM) based on the formula centered for the second derivative. Initially discussed the contour conditions, where the value of the solution itself is specified, are called Dirichlet Contour Conditions. We will see that to establish convergence, we must verify that the system has consistency and stability, but for this to occur, the Local Truncation Error and the Global Space (τ) Error *h* must have second-order accuracy (accuracy) in space, considering that the problem studied here is in a $O(h^2)$ single dimension (direction).
KEYWORDS: Consistency, Stability, Convergence, LeVeque, Norm-2.

1 I INTRODUÇÃO

A presente proposta traz em seu bojo a resolução de um Problema de Valor Inicial (PVI), de segunda ordem, u''(x)=f(x), no intervalo (0,1), com as condições de contorno u(0) = α e u(1) = β, , com a fonte de calor a função $f(x)=x^2$ que está sendo desenvolvida no lado direito da EDO. A malha é uniforme, somente no espaço, com largura h=1/(m+1), em que m é o número de pontos na malha a serem utilizados. Quanto maior for o valor de m, menor será a largura da malha. Este processo é denominado de

refinamento da malha, com o intuito de diminuir o erro da aproximação U_j, para j=1,2,...,m.

O objetivo é apresentar aos estudantes quais os procedimentos necessários para solucionar o PVI, por meio do MDF e verificar a sua estabilidade.

Como se trata de uma solução numérica, é de suma importância a utilização de um aplicativo computacional e de uma planilha eletrônica, a fim de que se obtenha com mais rapidez os resultados procurados e neste caso, utilizamos o Wolfran Mathematica, *Octave* e o Excel.

A estrutura do trabalho está organizada em Fundamentação Teórica (revisão de literatura), Aplicação (um exemplo resolvido) e Considerações Finais. As discussões orbitam na verificação da estabilidade do sistema, utilizando-se diversas técnicas.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vamos primeiro considerar as equações diferenciais ordinárias (EDOs) que são colocadas em algum intervalo $\alpha<x<b$, junto com algumas condições de contorno em cada extremidade do intervalo. Os problemas considerados neste capítulo são geralmente problemas de estado estacionário em que a solução varia apenas com a coordenada espacial, mas não com o tempo.

Problemas de estado estacionário são frequentemente associados a algum problema dependente do tempo que descreve o comportamento dinâmico e o problema do valor fronteira ou contorno (PVC) de 2 pontos ou equação elíptica que resulta da consideração do caso especial em que a solução é estável no tempo, e, portanto, os termos derivados do tempo são iguais a zero, simplificando as equações.

2.1 A equação do calor

Como um exemplo específico, considere o fluxo de calor em uma haste feita de algum material condutor de calor, sujeito a alguma fonte de calor externa ao longo de seu comprimento e algumas condições de contorno em cada extremidade. Se assumirmos que as propriedades do material, a distribuição inicial da temperatura e a fonte variam apenas com x, a distância ao longo do comprimento, e não através de qualquer seção transversal, então esperamos que a distribuição da temperatura, a qualquer momento, varie apenas com x e podemos modelar isso com uma equação diferencial em uma dimensão espacial. Desde que a solução possa variar com o tempo, designaremos u(x,t) como a temperatura no ponto x no tempo t, onde $\alpha<x<b$ ao longo de algum comprimento finito da barra. A solução é então governada pela equação do calor

$$u_t(x,t) = \left(\kappa\,(x)u_x(x,t)\right)_x + \psi(x,t), \tag{2.1}$$

onde K(x) é o coeficiente de condução do calor, que pode variar com x, e $\psi(x,t)$ é a fonte de calor (ou dissipador, se $\psi < 0$).

A equação (2.1) é frequentemente chamada de equação de difusão, uma vez que modela processos de difusão de forma mais geral, e a difusão de calor é apenas um exemplo. Presume-se que a teoria básica desta equação seja familiar ao leitor. Veja os livros específicos de EDP, como Kevorkian (2009) para uma dedução e mais introdução. Em geral, é extremamente valioso entender de onde vem a equação que se está tentando resolver, desde uma boa compreensão da física (ou biologia, etc.) é geralmente essencial para a compreensão do desenvolvimento e comportamento dos métodos numéricos para resolver a equação.

2.2 Condições de contorno

Se o material for homogêneo, então K(x)≡k é independente de x e a equação de calor (2.1) se reduz a

$$u_t(x,t) = \kappa u_{xx}(x,t) + \psi(x,t). \tag{2.2}$$

Junto com a equação, precisamos das condições iniciais,

$$u(x,0) = u^0(x),$$

e as condições de contorno, por exemplo, a temperatura pode ser especificada em cada extremidade,

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t). \tag{2.3}$$

Essas condições de contorno, onde o valor da própria solução é especificado, são chamadas Condições de Contorno de Dirichlet. Alternativamente, uma extremidade, ou ambas as extremidades, podem ser isoladas, no caso em que há fluxo de calor zero nessa extremidade e, portanto, u_x=0 nesse ponto. Esta condição de fronteira, que é uma condição na derivada de u e não no próprio u, é chamada de Condição de Contorno de Neumann. Para começar, vamos considerar o problema de Dirichlet para (2.2) com as condições de contorno (2.3).

2.3 O problema do estado estacionário

Em geral, esperamos que a distribuição da temperatura mude com o tempo. No entanto, se ψ(x,t), α(t) e β(t) são independentes do tempo, então podemos esperar que a solução eventualmente permaneça inalterada em momentos posteriores. Normalmente, haverá um tempo transitório inicial, como os dados iniciais $u^0(x)$ com uma abordagem u(x) (a menos que $u^0(x)$≡ u(x)), mas se estivermos interessados apenas em calcular a solução de estado estacionário em si, então podemos definir u_t=0 em (2.2) e obter um EDO em x para resolver para u(x):

$$u(a) = a, \qquad u(b) = \beta \tag{2.5}$$

Observação: ter duas condições de contorno não garante necessariamente que haja existência de uma solução única para uma equação geral de segunda ordem.

O problema (2.4) e (2.5) são chamados de PVC de 2-pontos, uma vez que uma condição é especificada em cada um dos dois pontos finais do intervalo onde a solução é desejada. Se, em vez disso, dois valores de dados foram especificados no mesmo ponto, digamos, $u(\alpha)=\alpha$ e $u'(\alpha)=\sigma$, e queremos encontrar a solução para $t\geq\alpha$, então teríamos um Problema de Valor Inicial (PVI).

Uma abordagem para calcular uma solução numérica para um problema de estado estacionário é escolher alguns dados iniciais e avançar no tempo usando um método numérico para EDP (2.2) dependente do tempo. No entanto, esta normalmente não é uma maneira eficiente de calcular a solução de estado estacionário se esta for tudo o que queremos. Em vez disso, podemos discretizar e resolver o PVC de 2-pontos dado por (2.4) e (2.5) diretamente. Este é o primeiro PVC que estudaremos em detalhes, começando na próxima seção. Neste estudo, não consideraremos alguns outros PVCs, incluindo os não lineares que são equações mais desafiadoras.

2.4 Um método de diferença finita simples

Como um primeiro exemplo de um método de diferença finita para resolver uma equação diferencial, considere a EDO de segunda ordem discutida acima,

$$u''(x) = f(x) \qquad \text{para } 0 < x < 1, \tag{2.6}$$

com as seguintes condições de contorno

$$u(0) = \alpha \qquad \text{e} \qquad u(1) = \beta. \tag{2.7}$$

A função f(x) é especificada e desejamos determinar u(x) no intervalo$0<x<1$. Este problema é chamado de Problema de Valor de Contorno (PVC) de *2-pontos*, uma vez que as condições de contorno são dadas em dois pontos. Este problema é tão simples que podemos resolvê-lo explicitamente (integrar f(x) duas vezes e determinar as duas constantes de integração para que as condições de contorno sejam satisfeitas)[1], mas estudar métodos de diferenças finitas para esta equação simples irá revelar algumas das características essenciais de todas essas análises, particularmente a relação do erro global (E) com o erro de truncamento local (τ) e o uso de estabilidade ao fazer esta conexão.

Tentaremos calcular uma função de grade consistindo de valores U_0, U_1,..., U_m, U_{m+1} onde U_i é nossa aproximação para a solução $u(x_j)$. Aqui $x_j=jh$, a distância entre os pontos da grade e $h=1/(m+1)$ é a *largura da malha*. Das condições de fronteira sabemos que $U_0=\alpha$ e $U_{m+1}=\beta$, e assim temos m valores desconhecidos U_1,..., U_m para calcular. Se substituirmos u"(x) in (2.6) pela aproximação da diferença centrada

$$D^2U_j = \frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right),$$

então nós obtemos um conjunto de equações algébricas

1 Este PVI descrito entre parênteses encontra-se resolvido no Apêndice A deste artigo.

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,m. \tag{2.8}$$

Observe que a primeira equação (j=1) envolve o valor $U_0=\alpha$ e a última equação (j=m) envolve o valor $U_{m+1}=\beta$.

A partir da Equação (2.8), como forma introdutória de compreensão do que estamos estudando, vamos escrever algumas equações algébricas, para j=1,2,...,m:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{h^2}(U_0 - 2U_1 + U_2) = f(x_1) \\
\frac{1}{h^2}(U_1 - 2U_2 + U_3) = f(x_2) \\
\frac{1}{h^2}(U_2 - 2U_3 + U_4) = f(x_3) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\frac{1}{h^2}(U_{m-2} - 2U_{m-1} + U_m) = f(x_{m-1}) \\
\frac{1}{h^2}(U_{m-1} - 2U_m + U_{m+1}) = f(x_m)
\end{array} \tag{2.8a}$$

Podemos organizar as equações (2.8a), sob a forma de um sistema linear com equações:

$$\begin{cases}
\frac{1}{h^2}U_0 - \frac{2}{h^2}U_1 + \frac{1}{h^2}U_2 + \cdots + 0 + 0 + 0 + 0 = f(x_1) \\
0 + \frac{1}{h^2}U_1 - \frac{2}{h^2}U_2 + \frac{1}{h^2}U_3 + \cdots + 0 + 0 + 0 = f(x_2) \\
0 + 0 + \frac{1}{h^2}U_2 - \frac{2}{h^2}U_3 + \frac{1}{h^2}U_4 + \cdots + 0 + 0 = f(x_3) \\
\qquad\qquad \vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + \frac{1}{h^2}U_{m-2} - \frac{2}{h^2}U_{m-1} + \frac{1}{h^2}U_m + 0 = f(x_{m-1}) \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{h^2}U_{m-1} - \frac{2}{h^2}U_m + \frac{1}{h^2}U_{m+1} = f(x_m)
\end{cases} \tag{2.8b}$$

Para melhorar a compreensão e escrita matricial, vamos passar para o segundo membro do sistema acima os termos de U_0 e U_{m+1}:

$$\begin{cases}
-\frac{2}{h^2}U_1 + \frac{1}{h^2}U_2 + \cdots + 0 + 0 = f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\
\frac{1}{h^2}U_1 - \frac{2}{h^2}U_2 + \frac{1}{h^2}U_3 + \cdots + 0 = f(x_2) \\
0 + \frac{1}{h^2}U_2 - \frac{2}{h^2}U_3 + \frac{1}{h^2}U_4 + \cdots + 0 = f(x_3) \\
\qquad\qquad \vdots \\
0 + 0 + \cdots + \frac{1}{h^2}U_{m-2} - \frac{2}{h^2}U_{m-1} + \frac{1}{h^2}U_m = f(x_{m-1}) \\
0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{h^2}U_{m-1} - \frac{2}{h^2}U_m = f(x_m) - \frac{\beta}{h^2}
\end{cases} \tag{2.8c}$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}
-2 & 1 & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & \\
 & 1 & -2 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & -2 & 1 \\
 & & & & 1 & -2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{m-1} \\ U_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}. \tag{2.8d}$$

Temos um sistema linear de equações para incógnitas, que podem ser escritas na forma

$$AU = F, \tag{2.9}$$

onde U é o vetor das incógnitas $U=[U_1, U_2,..., U_m]^T$

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Este sistema linear tridiagonal não é singular e pode ser facilmente resolvido para U de qualquer lado direito F.

Vamos fazer uma pequena simulação com m=3, para escrever a matriz A e o vetor F. O valor de h=0,25, as condições de fronteira α=0, β=1, e a fonte de calor $f(x)=x^2$:

$$A = \begin{bmatrix} -32 & 16 & 0 \\ 16 & -32 & 16 \\ 0 & 16 & -32 \end{bmatrix} \text{e} \qquad F = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.25 \\ -15.4375 \end{bmatrix}.$$

A solução de (2.9) é o vetor $U=A^{-1}F$. A inversa da matriz simétrica A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/64 & -1/32 & -1/64 \\ -1/32 & -1/16 & -1/32 \\ -1/64 & -1/32 & -3/64 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \begin{bmatrix} 0.230469 \\ 0.464844 \\ 0.714844 \end{bmatrix}.$$

Quão bem U se aproxima da função u(x)? Nós sabemos que a diferença centrada a aproximação D^2, quando aplicada a uma função suave conhecida u(x), dá uma segunda ordem de aproximação precisa para u"(x). Mas aqui estamos fazendo algo mais complicado – sabemos os valores de u" em cada ponto e estamos calculando todo um conjunto de valores discretos $U_1,\ldots, U_m$ com a propriedade de que a aplicação de D^2 a esses valores discretos dá o valor desejado $f(x_j)$. Embora possamos esperar que este processo também forneça erros que são $O(h^2)$ (e na verdade, é verdade), isso certamente não é óbvio.

Primeiro, devemos esclarecer o que queremos dizer com o erro nos valores discretos $U_1,\ldots, U_m$ em relação à verdadeira solução u(x), que é uma função. Uma vez que Uj é suposta aproximação de $u(x_j)$, é natural usar os erros pontuais $Uj-u(x_j)$. Se denominarmos Û seja o vetor de valores verdadeiros

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{m-1}) \\ u(x_m) \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

então o vetor de erros global E é definido por

$E = U - \hat{U}$

contém os erros em cada ponto da grade.

Nosso objetivo agora é obter um limite para a magnitude desse vetor, mostrando que ele é $O(h^2)$ quando $h\to 0$. Para medir a magnitude deste vetor, devemos usar alguma norma, por exemplo, a norma máxima

$$\|E\|_\infty = \max_{1\le j\le m} |E_j| = \max_{1\le j\le m} \left|U_j - u(x_j)\right|.$$

Este é apenas o maior erro no intervalo. Se pudermos mostrar que $\|\underline{E}\|_\infty=O(h_2)$,

então segue que cada erro pontual também deve ser $O(h^2)$.

Outras normas são frequentemente utilizadas para medir as funções da grade, seja porque são mais apropriadas para um determinado problema ou simplesmente porque são mais fáceis de vincular, uma vez que algumas técnicas matemáticas funcionam apenas com uma norma particular. Outras normas que frequentemente são usadas incluem a norma-1

$$\|E\|_1 = h\sum_{j=1}^{m}|E_j|$$

e a norma-2[2]

$$\|E\|_2 = \left(h\sum_{j=1}^{m}|E_j|^2\right)^{1/2}.$$

Observe o fator h que aparece nessas definições. Consulte o Apêndice A (LeVeque, 2007, p. 245) para uma análise mais completa discussão das normas da função de grade e como elas se relacionam com as normas vetoriais padrão.

Agora, vamos voltar ao problema de estimar o erro em nossa solução de diferença finita ao PVC obtido resolvendo o sistema (2.9). A técnica que usaremos é absolutamente básica à análise de métodos de diferenças finitas em geral. Envolve duas etapas principais. Nós primeiro calcularemos o *erro de truncamento local* (LTE) do método e em seguida, usaremos alguma forma de estabilidade para mostrar que o *erro global* pode ser limitado em termos de LTE.

O erro global simplesmente se refere ao erro *U*-Û que estamos tentando limitar. O LTE se refere ao erro em nossa aproximação de diferença finita de derivadas e, portanto, é algo que pode ser facilmente estimado usando as expansões da série de Taylor, como no Anexo A. A estabilidade é o ingrediente mágico que nos permite ir a partir desses facilmente calculados limites o erro local às estimativas que realmente queremos para o erro global. Vamos olhar para cada um deles por sua vez.

2.5 Erro Local de Truncamento (LTE)

O LTE é definido substituindo U_j pela solução verdadeira $u(x_j)$ na fórmula (2.8) de diferença finita. Em geral, a verdadeira solução $u(x_j)$ não vai satisfazer esta equação exatamente e a discrepância é o LTE, que denotamos por :

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\right) - f(x_j) \qquad (2.12)$$

para j=1,2,...,m. Claro, na prática, não sabemos qual é a verdadeira solução u(x) é, mas se assumirmos que é suave, então pelas expansões da série de Taylor (1.5a) (ver Anexo A), sabemos que

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}\left(2u(x_j) + h^2u''(x_j) + \frac{2}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5) - 2u_j\right) - f(x_j)\,.$$

Cancelar os termos simétricos $2u(x_j)$ e $-2u_j$:

2 Também denominada de Norma Euclidiana.

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}\left(1h^2u''(x_j) + \frac{1}{12}h^4u''''(x_j) + O(h^5)\right) - f(x_j)\,.$$

Dividir por h^2:

$$\tau_j = \left[u''(x_j) + \frac{1}{12}h^2u''''(x_j) + O(h^4)\right] - f(x_j)\,. \qquad (2.13)$$

Usando nossa equação diferencial original (2.6), isso se torna

$$\tau_j = +\frac{1}{12}h^2u''''(x_j) + O(h^4)\,.$$

Embora u'''' em geral seja desconhecida, é alguma função fixa (constante) dependente de h, e assim $\tau_j=O(h^2)$ quando $h\to 0$.

Por exemplo, para a função $u(x)=\frac{x^4}{12}+x$, a sua quarta derivada é $u''''(x)=2$, que é uma função constante, então a sua função erro de truncamento é

$$\tau_j = \frac{1}{6}h^2 + O(h^2), \qquad (2.13a)$$

confirmando que o ETL tem acurácia de segunda ordem quando $h\to 0$.

Se definirmos ser o vetor τ com componentes τ_j, então

$$\tau = A\hat{U} - F,$$

onde o $\hat{U}$ é o vetor da solução verdadeira (2.11), e assim

$$A\hat{U} = F + \tau. \qquad (2.14)$$

2.6 Erro global

Para obter uma relação entre o erro local e o erro global $E=U-\hat{U}$, nós subtraímos (2.14) de (2.9) que define U, obtendo

$$AE = -\tau. \qquad (2.15)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&A\hat{U} - AU = \tau\\
&A(\hat{U} - U) = \tau\\
&A(-(U - \hat{U})) = \tau\\
&A(-E) = \tau\\
&AE = -\tau\,.
\end{aligned}$$

Esta é simplesmente a forma matricial do sistema de equações

$$\frac{1}{h^2}(E_{j-1} - 2E_j + E_{j+1}) = -\tau(x_j), \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,m$$

com as condições de limite

$$E_0 = E_{m+1} = 0$$

uma vez que estamos usando os dados de contorno exatos $U_0=\alpha$ e $U_{m+1}=\beta$.

$$\frac{1}{h^2}(E_0 - 2E_1 + E_2) = -\tau(x_1), \qquad \text{mas } E_0 = 0,$$
$$\frac{1}{h^2}(-2E_1 + E_2) = -\tau(x_1)$$
$$\frac{1}{h^2}(E_1 - 2E_2 + E_3) = -\tau(x_2)$$
$$\frac{1}{h^2}(E_2 - 2E_3 + E_4) = -\tau(x_3), \qquad \text{mas } E_4 = 0,$$
$$\frac{1}{h^2}(E_2 - 2E_3) = -\tau(x_3)$$

Um exemplo para m=3:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau(x_1) \\ -\tau(x_2) \\ -\tau(x_3) \end{bmatrix},$$

para h=0.25 e $\tau(x_j)$=0.010417, para j=1,2,3:

$$16\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.010417 \\ -0.010417 \\ -0.010417 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -32 & 16 & 0 \\ 16 & -32 & 16 \\ 0 & 16 & -32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.010417 \\ -0.010417 \\ -0.010417 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.046875 & -0.031250 & -0.015625 \\ -0.031250 & -0.062500 & -0.031250 \\ -0.015625 & -0.031250 & -0.046875 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.046875 & -0.031250 & -0.015625 \\ -0.031250 & -0.062500 & -0.031250 \\ -0.015625 & -0.031250 & -0.046875 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.010417 \\ -0.010417 \\ -0.010417 \end{bmatrix},$$

E o vetor erro global é:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015625 \\ 0.020833 \\ 0.015625 \end{bmatrix}.$$

Nós vemos que o erro global satisfaz um conjunto de equações de diferenças finitas que tem exatamente a mesma forma que nossas equações de diferença originais para U, exceto que o lado direito é dado por -τ em vez de F.

A partir disso, deve ficar claro por que esperamos que o erro global seja aproximadamente da mesma magnitude que o erro local. Podemos interpretar o sistema (2.15) como uma discretização da EDO

$$e''(x) = -\tau(x), \qquad \text{para } 0 < x < 1 \tag{2.16}$$

com as seguintes condições de contorno

$$e(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad e(1) = 0.$$

Desde que $\tau \approx \frac{1}{12} h_2 u''''(x)$, integrar duas vezes mostra que o erro global deve ser aproximadamente

$$e(x) \approx -\frac{1}{12}h^2 u''(x) + \frac{1}{12}h^2\left(u''(0) + x\big(u''(1) - u''(0)\big)\right)$$

e, portanto, o erro deve ser $O(h^2)$.

Por exemplo, para $u(x)= \frac{x^4}{12} +x$ a segunda derivada é $u''(x)=x^2$. O valor de $u''(0)=0$ e

u"(1)=1. Substituindo-os na equação acima, tem-se:

$$e(x) \approx -\frac{1}{12}h^2(x^2) + \frac{1}{12}h^2\left((0 + x(1-0))\right)$$
$$e(x) \approx -\frac{1}{12}h^2(x^2) + \frac{1}{12}h^2(x)$$
$$e(x) \approx \frac{1}{12}h^2(x - x^2). \tag{2.16a}$$

Se h→0, então e(x)→0.

Portanto, a Equação (2.16a) é a função do erro global para u(x)= $\frac{x^4}{12}$ +x.

2.7 Estabilidade

O argumento acima não é totalmente convincente porque estamos contando com a suposição que resolver as equações de diferença dá uma aproximação decente para a solução das equações diferenciais subjacentes (na verdade, o inverso agora, que a solução para o diferencial da equação (2.16) dá uma boa indicação da solução para as equações de diferença (2.15)). Uma vez que é exatamente essa suposição que estamos tentando provar, o raciocínio é bastante circular.

Em vez disso, vamos olhar diretamente para o sistema discreto (2.15), que iremos reescrever no formato

$$A^h E^h = -\tau^h. \tag{2.17}$$

onde o expoente indica que estamos em uma grade com espaçamento de malha h. Isso serve como um lembrete de que essas quantidades mudam à medida que refinamos a grade. Em particular, a matriz A^h é uma matriz m×m com h=$\frac{1}{m+1}$ de modo que sua dimensão cresce à medida que h → 0.

Seja $(A^h)^{-1}$ a inversa da matriz. Então a solução do sistema (2.17) é

$$E^h = -(A^h)^{-1}\tau^h$$

e cuja norma é

$$\|E^h\| = \|(A^h)^{-1}\tau^h\|$$
$$\leq \|(A^h)^{-1}\|\|\tau^h\|.$$

Sabemos que $\|\tau^h\|=O(h^2)$ e esperamos que o mesmo seja verdade para $\|E^h\|$. É claro o que precisamos para que isso seja verdade: precisamos que $\|(A^h)^{-1}\|$ seja limitado por alguma constante independente de h como h → 0:

$\|(A^h)^{-1}\|\leq C$, para todo h suficientemente pequeno.

Então teremos

$$\|E^h\| \leq C\|\tau^h\| \tag{2.18}$$

e assim $\|E^h\|$ vai para zero pelo menos tão rápido quanto $\|\tau^h\|$. Isso motiva a seguinte definição de estabilidade para Problemas de Valor de Contorno (BVPs) lineares.

Definição 2.1. Suponha que um método de diferença finita para um PVC linear dê uma sequência de equações matriciais da forma $A^hU^h=F^h$, onde h é a largura da malha.

Dizemos que o método é estável se $(A^h)^{-1}$ existir para todo h suficientemente pequeno (para $h < h_0$, digamos) e se existe uma constante C, independente de h, de modo que

$$\|(A^h)^{-1}\| \leq C \qquad \text{para todo } h < h_0. \tag{2.19}$$

2.8 Consistência

Dizemos que um método é *consistente* com a equação diferencial e as condições de contorno se

$$\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0. \tag{2.20}$$

Isso simplesmente diz que temos uma discretização sensata do problema. Normalmente $\|\tau^h\|=O(h^p)$ para algum inteiro p>0, e então o método é certamente consistente.

2.9 Convergência

Um método é considerado convergente se $\|E^h\|\to 0$ quando $h\to 0$. Combinando as ideias apresentadas acima chegamos à conclusão de que

$$\textit{consistência} + \textit{estabilidade} = \textit{convergência}. \tag{2.21}$$

Isso é facilmente provado usando (2.19) e (2.20) para obter o limite

$$\|E^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \leq C\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

Embora isso tenha sido demonstrado apenas para o BVP linear, de fato, a maioria das análises de métodos de diferenças finitas para equações diferenciais segue essa mesma abordagem de duas camadas, e a afirmação (2.21) às vezes é chamada de teorema dos métodos de diferenças finitas. Na verdade, como nossa análise acima indica, isso geralmente pode ser reforçado para dizer que

$$O(h^p) \text{ erro local de truncamento + estabilidade} \Rightarrow O(h^p) \text{ erro global.} \tag{2.22}$$

A consistência (e a ordem de precisão) geralmente é a parte mais fácil de verificar. Verificando a estabilidade é a parte difícil. Mesmo para o BVP linear que acabamos de discutir, não está claro como verificar a condição (2.19), uma vez que essas matrizes se tornam maiores à medida que $h\to 0$. Para outros problemas, pode até não estar claro como definir estabilidade de maneira apropriada. Como veremos, existem muitas definições de "estabilidade" para diferentes tipos de problemas. O desafio de analisar métodos de diferenças finitas para novas classes de problemas, muitas vezes, é encontrar uma definição apropriada de "estabilidade" que permite provar a convergência usando (2.21) ao mesmo tempo que é suficientemente gerenciável para que possamos verificar se ela é válida para métodos específicos de diferenças finitas. Para EDPs não lineares, isso frequentemente deve ser ajustado para cada classe particular de problemas e conta com a teoria matemática existente e técnicas de análise para esta classe de problemas.

Quer se tenha ou não uma prova formal de convergência para um determinado método, é sempre boa prática para verificar se o programa de computador está apresentando

comportamento convergente, na taxa esperado. O Apêndice A (LeVeque, 2007) contém uma discussão de como o erro nos resultados calculados pode ser estimado.

2.10 Estabilidade na norma-2

Voltando ao PVC no início do trabalho, vamos ver como podemos verificar a estabilidade e daí a precisão de segunda ordem. A técnica usada depende da norma que desejamos considerar. Aqui, vamos considerar a norma-2 e ver que podemos mostrar a estabilidade explicitamente ao calcular os valores próprios e os vetores próprios da matriz A.

Uma vez que a matriz A em (2.10) é simétrica, a norma-2 de A é igual ao seu raio espectral (ver Seção A.3.2 e Seção C.9, de LeVeque (2007)):

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1\le p\le m} |\lambda_p|.$$

(Observe que p se refere ao p-ésimo valor próprio da matriz. Os sobrescritos (expoentes) são usados para indexar os autovalores e autovetores, enquanto os subscritos (índice) no autovetor abaixo referem-se a componentes do vetor.)

A matriz A^{-1} também é simétrica e os autovalores de A^{-1} são simplesmente os inversos dos valores próprios de A, então

$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_{1\le p\le m} \left|(\lambda_p)^{-1}\right| = \left(\min_{1\le p\le m} |\lambda_p|\right)^{-1}.$$

Então, tudo o que precisamos fazer é calcular os valores próprios de A e mostrar que eles são limitados longe de zero quando h → 0. Claro que temos um conjunto infinito de matrizes A^h a considerar, quando h varia, mas como a estrutura dessas matrizes é tão simples, podemos obter uma expressão geral para os autovalores de cada A^h. Para problemas mais complexos, podemos não ser capazes de fazer isso, mas vale a pena examinar em detalhes esse problema, porque geralmente se considera problemas de modelo para os quais tal análise é possível. Também precisaremos saber esses valores próprios para outros propósitos quando discutirmos as equações parabólicas no Capítulo 9 (LEVEQUE, 2007). (Consulte também a Seção C.7 para expressões mais gerais para os valores próprios de matrizes relacionadas.)

Vamos agora nos concentrar em um valor particular de h=1/(m+1) e eliminar o expoente (sobrescrito) h para simplificar a notação. Então os m autovalores de A são dados por

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}[\cos(p\pi h) - 1] \qquad \text{para } p = 1,2,\cdots,m. \tag{2.23}$$

O autovetor u^p correspondente ao λ_p tem componentes u^p_j para j=1,2,...,m, através de

$$u_j^p = \sin(p\pi jh). \tag{2.24}$$

Isto pode ser verificado checando que $Au^p=\lambda_p u^p$. A *j-ésima* componente do vetor Au^p é

$$\begin{aligned}(Au^p)_j &= \frac{1}{h^2}\left(u_{j-1}^p - 2u_j^p + u_{j+1}^p\right)\\ &= \frac{1}{h^2}\left(\sin(p\pi(j-1)h) - 2sen\,(p\pi jh) + sen\,(p\pi(j+1)h)\right.\\ &= \frac{1}{h^2}\left(sen(p\,\pi jh)\cos(p\pi h) - 2sen(p\pi jh) + sen(p\pi jh)\cos(p\pi h)\right)\\ &= \lambda_p u_j^p.\end{aligned}$$

Observe que para j = 1 e j = m, o *j-ésimo* componente de Au^p parece um pouco diferente (o u^p_{j-1} ou u^p_{j+1} acima o termo está faltando), mas a forma acima e as manipulações trigonométricas ainda são válidas, desde que definamos

$$u_0^p = u_{m+1}^p = 0$$

como é consistente com (2.24). De (2.23), vemos que o menor autovalor de A (em magnitude) é (nesta dedução, foi utilizada a expansão da série de Taylor para o cosseno, conforme está registrado no Apêndice B, deste artigo, na Equação B.1)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2}{h^2}(\cos(\pi h) - 1)\\ &= \frac{2}{h^2}\left(1 - \frac{1}{2}\pi^2h^2 + \frac{1}{24}\pi^4h^4 + O(h^6) - 1\right)\\ &= \frac{2}{h^2}\left(-\frac{1}{2}\pi^2h^2 + \frac{1}{24}\pi^4h^4 + O(h^6)\right)\\ &= \left(-\pi^2 + \frac{1}{12}\pi^4h^2 + O(h^2)\right)\\ &= -\pi^2 + O(h^2).\end{aligned}$$

Isso é claramente limitado a zero como h → 0, e assim vemos que o método é estável na norma-2. Além disso, obtemos um limite para o erro com isso:

$$\|E^h\|_2 \le \|(A^h)^{-1}\|_2\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{\pi^2}\|\tau^h\|_2.$$

Desde que $\tau_j^h \approx \frac{1}{12}h^2u''''(x_j)$, esperamos $\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{12}h^2\|u''''\|_2 = \frac{1}{12}h^2\|f''\|_2$. A norma-2 da função f'' aqui significa a norma da função de grade desta função avaliada nos pontos discretos , embora isso seja aproximadamente igual à norma do espaço de funções de f'' definida usando (A.14, de LeVeque (2007)).

Observe que o autovetor (2.24) está intimamente relacionado à autofunção do correspondente operador diferencial $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. As funções

$$u^p(x) = \sin(p\pi x), \qquad p = 1,2\cdots,$$

satisfazer a relação

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^p(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\sin(p\pi x)]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\{p\pi\cos(p\pi x)\} = p\pi(-sen(p\pi x)p\pi)\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u^p(x) &= -p^2\pi^2 sen(p\pi x)\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u^p(x) &= \mu_p u^p(x)\end{aligned}$$

com autovalor $\mu_p = -p^2\pi^2$. Essas funções também satisfazem $u^p(0)=u^p(1)=0$, e portanto, são autofunções de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ em [0,1] com condições de contorno homogêneas.

A aproximação discreta para este operador dada pela matriz A tem apenas *m* autovalores em vez de um número infinito, e os autovetores correspondentes (2.24) são simplesmente os primeiros *m* autofunções de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avaliado nos pontos da grade. O autovalor λ_p não é exatamente o igual a u_p, mas pelo menos para pequenos valores de p é quase o mesmo, uma vez que a série de Taylor expansão do cosseno em (2.23) dá

$$\begin{aligned}\lambda_p &= \frac{2}{h^2}\left(-\frac{1}{2}p^2\pi^2h^2 + \frac{1}{24}p^4\pi^4h^4 + \cdots\right)\\ &= -p^2\pi^2 + O(h^2) \quad \text{quando } h \to 0 \text{ para } p \text{ fixo.}\end{aligned}$$

Essa relação será ilustrada posteriormente quando estudarmos métodos numéricos para a equação do calor (2.1).

Com o intuito de uma melhor compreensão do que foi estudado nesta Seção 2, vamos aplicar os conhecimentos adquiridos em um exemplo prático, como comumente é apresentado nos livros acadêmicos e na vida prática, quando o profissional está atuando no mercado de trabalho.

3 | APLICAÇÃO

Sejam o PVC

$$u''(x) = f(x) \quad \text{em} \quad (0,1); \qquad u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta \tag{3.1}$$

e uma discretização do domínio em uma malha uniforme com *m*+2 pontos, com h=1/(m+1) e x_j=jh. Aproximando esta equação em um ponto x_j com base na fórmula centrada para a derivada segunda, temos o conjunto de equações algébricas[3]

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \qquad \text{para } j = 1,2,\cdots,m. \tag{3.2}$$

com os valores U_0=α e U_{m+1}=β prescritos.

a) Este método de diferenças finitas pode ser escrito como um sistema linear

$$AU = F. \tag{3.3}$$

com a matriz dos coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o termo independente $F \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de incógnitas $U \in \mathbb{R}^m$. Apresente a matriz A e o vetor F, discutindo a existência e a unicidade de solução do sistema (3.3).

b) Defina os conceitos de consistência, estabilidade e convergência para o método (3.3).

c) Sabendo que os autovalores da matriz A em (3.3) são dados por[4]

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}[\cos(p\pi h) - 1] \qquad \text{para } p = 1,2,\cdots,m. \tag{3.4}$$

Mostre que o método (3.3) é estável e convergente na norma-2, determinando sua ordem.

3 Conforme estudado à Equação (2.8).
4 Consulte a Equação (2.23).

3.1 Solução do Item a)

A dedução da matriz A se encontra na Seção 2.4, com as devidas justificativas nas Equações (2.8a), (2.8b), (2.8c) e (2.8d), onde de forma construtiva é deduzido o sistema (2.9). A matriz A e o vetor F estão descritos na Equação (2.10).

Este sistema linear tridiagonal não é singular e pode ser facilmente resolvido para U de qualquer lado direito F.

3.2 Solução do Item b)

3.2.1 *Consistência*

Está definida na Seção 2.8. A norma do ETL elevado ao passo tende a zero quando tende a zero, conforme a Equação (2.20). Simbolicamente:

$$\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

3.2.2 Estabilidade

A estabilidade está relacionada aos erros de truncamento local (τ) e o erro global (E=U-Û), devendo haver uma limitação do E por τ.

Na Definição 2.1, estabelece que a solução do sistema $A^h U^h = F^h$, deva satisfazer a Equação (2.19):

$$\|(A^h)^{-1}\| \leq C \qquad \text{para todo } h < h_0.$$

Então, a estabilidade está relacionada em limitar o erro global pelo erro de truncamento local:

$$\|E^h\| \leq C\|\tau^h\|,$$

$$\|E^h\| \to 0 \qquad \text{quando } h \to 0.$$

3.2.3 Convergência

Ou seja,

$$\|E^h\| \to 0 \qquad \text{quando } h \to 0.$$

Consistência + estabilidade ⇒ Convergência.

A convergência está definida na Seção 2.9. Combinando (2.19) com (2.20):

$$\|E^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \leq C\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

3.3 Solução do Item c)

A Seção 2.10, contém as definições de estabilidade na norma-2.

Uma vez que a matriz A de (2.10) é simétrica, a norma-2 de A é igual ao seu raio

espectral.

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1 \le p \le m} |\lambda_p|$$

e

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2}[\cos(p\pi h) - 1] \qquad \text{para } p = 1,2,\cdots,m.$$

Com isto, basta fazermos algumas simulações computacionais para determinar os autovalores e verificar aquele que tem o maior valor absoluto – que será o raio espectral e a norma-2 da matriz A.

3.4 Exemplo

Como forma de esclarecer alguns pontos importantes sobre consistência, estabilidade e convergência, vamos resolver um exemplo, com os seguintes dados: $ax = 0$, $bx = 0$, $u(0) = \alpha = 0$, $u(1) = \beta = 1$, m = 9 e $f(x) = x^2$, para a EDO de segunda ordem abaixo:

$$u''(x) = x^2. \tag{3.5}$$

A solução exata de (3.5) para as condições iniciais u(0)=0 e u'(0)=1 é a função

$$u(x) = \frac{1}{12}x^4 + x. \tag{3.6}$$

m	ax	bx	h	h^2	$1/h^2$	j	$x_j = jh$	α	β	$f(x) = x^2$	$F(x_j)$	$\hat{U} = u(x_j)$
										0.00		
						1	0.1			0.01	0.01	0,100008
						2	0.2			0.04	0.04	0,200133
						3	0.3			0.09	0.09	0,300675
						4	0.4			0.16	0.16	0,402133
9	0	1	0.1	0.01	100	5	0.5	0	1	0.25	0.25	0,505208
						6	0.6			0.36	0.36	0,610800
						7	0.7			0.49	0.49	0,720008
						8	0.8			0.64	0.64	0,834133
						9	0.9			0.81	−99.19	0,954675
										1.00		

Tabela 3. 1 – Valores numéricos de $f(x_i) = x^2$ e $u(x_j) = \frac{1}{12}x^4 + x$, $x \in (0,1)$

Fonte: elaborada pelo autor.

Com os dados da Tabela 3.1, vamos escrever o seguinte sistema, com base em (2.8d):

$$\begin{bmatrix} -200 & 100 & & & & & & & \\ 100 & -200 & 100 & & & & & & \\ & 100 & -200 & 100 & & & & & \\ & & 100 & -200 & 100 & & & & \\ & & & 100 & -200 & 100 & & & \\ & & & & 100 & -200 & 100 & & \\ & & & & & 100 & -200 & 100 & \\ & & & & & & 100 & -200 & 100 \\ & & & & & & & 100 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.16 \\ 0.25 \\ 0.36 \\ 0.49 \\ 0.64 \\ -99.19 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a matriz simétrica seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} -200 & 100 & & & & & & & \\ 100 & -200 & 100 & & & & & & \\ & 100 & -200 & 100 & & & & & \\ & & 100 & -200 & 100 & & & & \\ & & & 100 & -200 & 100 & & & \\ & & & & 100 & -200 & 100 & & \\ & & & & & 100 & -200 & 100 & \\ & & & & & & 100 & -200 & 100 \\ & & & & & & & 100 & -200 \end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

As normas da matriz A, são:

$\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 400$, neste caso, como *j* fixo e *i* variando, temos que a norma-1, é a soma dos elementos absolutos por coluna (soma máxima da coluna).

$\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = 400$, agora, como *i* fixo e *j* variando, temos que a norma-2, é a soma dos elementos absolutos por linha

$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \in \rho(A^T A)\}} = 390.21$, que é o raio espectral da matriz A.

A inversa da matriz A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.009 & -0.008 & -0.007 & -0.006 & -0.005 & -0.004 & -0.003 & -0.002 & -0.001 \\ -0.008 & -0.016 & -0.014 & -0.012 & -0.010 & -0.008 & -0.006 & -0.004 & -0.002 \\ -0.007 & -0.014 & -0.021 & -0.018 & -0.015 & -0.012 & -0.009 & -0.006 & -0.003 \\ -0.006 & -0.012 & -0.018 & -0.024 & -0.020 & -0.016 & -0.012 & -0.008 & -0.004 \\ -0.005 & -0.010 & -0.015 & -0.020 & -0.025 & -0.020 & -0.015 & -0.010 & -0.005 \\ -0.004 & -0.008 & -0.012 & -0.016 & -0.020 & -0.024 & -0.018 & -0.012 & -0.006 \\ -0.003 & -0.006 & -0.009 & -0.012 & -0.015 & -0.018 & -0.021 & -0.014 & -0.007 \\ -0.002 & -0.004 & -0.006 & -0.008 & -0.010 & -0.012 & -0.014 & -0.016 & -0.008 \\ -0.001 & -0.002 & -0.003 & -0.004 & -0.005 & -0.006 & -0.007 & -0.008 & -0.009 \end{bmatrix}.$$

As normas são:

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \frac{1}{8}, \qquad \text{(soma máxima da coluna).}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \frac{1}{8}, \qquad \text{(soma máxima da linha)}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \in \rho(A^{-T} A^{-1})\}} = 0.1022$$

O número de condicionamento[5] da matriz A é determinado por:

$$\kappa_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

Neste exemplo:

5 O condicionamento de um sistema linear é um conceito relacionado à forma como os erros se propagam dos dados de entrada para os dados de saída. No contexto de um sistema linear *AU=F*, temos que a solução *U* depende dos dados de entrada *F*..

$$\kappa_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1 = 400 \times \frac{1}{8} = 50.$$
$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = 390.21 \times 0.1022 = 39.863.$$
$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty = 400 \times \frac{1}{8} = 50.$$

O menor número de condicionamento é o da norma-2.

O número da condição desempenha um papel na taxa de convergência de muitos métodos iterativos para resolver um sistema linear com a matriz A. Dentre os três calculados, o menor é o da norma-2.

O vetor das incógnitas é determinado por $U=A^{-1}F$:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.16 \\ 0.25 \\ 0.36 \\ 0.49 \\ 0.64 \\ -99.19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.091750 \\ 0.183600 \\ 0.275850 \\ 0.369000 \\ 0.463750 \\ 0.561000 \\ 0.661850 \\ 0.767600 \\ 0.879750 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

O erro global é determinado por: $E=U-\hat{U}$. Com os dados da Tabela 3.1 e do vetor (3.8), temos:

$$E = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ u(x_4) \\ u(x_5) \\ u(x_6) \\ u(x_7) \\ u(x_8) \\ u(x_9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}008258 \\ -0{,}016533 \\ -0{,}024825 \\ -0{,}033133 \\ -0{,}041458 \\ -0{,}049800 \\ -0{,}058158 \\ -0{,}066533 \\ -0{,}074925 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E^h = \begin{bmatrix} 0.5887 + 0.1913i \\ 0.6310 + 0.2050i \\ 0.6572 + 0.2135i \\ 0.6764 + 0.2198i \\ 0.6918 + 0.2248i \\ 0.7046 + 0.2289i \\ 0.7156 + 0.2325i \\ 0.7253 + 0.2357i \\ 0.7340 + 0.2385i \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

A norma-máxima[6] do erro global é:

$$\|E\|_\infty = \max_{1 \le j \le 9} |E_9| = 0{,}074925.$$

Este é apenas o maior erro no intervalo. Se pudermos mostrar que $\|E\|_\infty = O(h^2)$, então segue que cada erro pontual também deve ser $O(h^2)$.

$\|E\|_\infty = 0{,}074925 = 7.5 \times 10^{-2}$ e $h^2 = 10^{-2}$. Dividindo-se a norma-máx por h^2, temos que, $\|E\|_\infty = 7.5h^2$, cuja precisão é $O(h^2)$.

A norma-1[7] do erro global é determinada por:

$$\|E\|_1 = h\sum_{j=1}^{9}|E_j| = 0.1(0{,}373625) = 0{,}0373625 = 3.73 \times 10^{-2} = 3.74h^2.$$

A norma-2:

$$\|E\|_2 = \left(h\sum_{j=1}^{9}|E_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{0.1\sum_{j=1}^{9}|E_j|^2} = \sqrt{0.1(1{,}97 \times 10^{-2})} = 0{,}0444$$

6 No Mathematica, o comando é o seguinte: , porém como a letra E está reservada à constante de Euler, então tivemos que acrescentar o G, e o comando passou a ser: Norm[EG, Infinity].
7 No MATLAB, o comando é: h*norm(E,1); no Mathematica, o comando é h*Norm[EG, 1].

$=4.44\times10\text{-}2=4.44h^2$, logo a precisão da norma-2 é de segunda ordem, $O(h^2)$.

O erro global para cada x_j é determinado pela função (2.16a), que é uma função quadrática com máximo global em $x_j=0.5$, sendo assim, existem dois intervalos: um de crescimento e outro de decrescimento, fazendo com que e(x)→0 quando h→0, somente no segundo intervalo.

As normas 1 e 2, do erro global é calculada a partir das informações da Tabela 3.2:

j	E^h	$\lvert E^h \rvert$	$h\lvert E^h \rvert$	$\lvert E^h \rvert^2$	$h\lvert E^h \rvert^2$
1	$0.5887 + 0.1913i$	0.6190	0,0619	0,3832	0,0383
2	$0.6310 + 0.2050i$	0.6635	0,0663	0,4402	0,0440
3	$0.6572 + 0.2135i$	0.6910	0,0691	0,4775	0,0478
4	$0.6764 + 0.2198i$	0.7112	0,0711	0,5059	0,0506
5	$0.6918 + 0.2248i$	0.7274	0,0727	0,5291	0,0529
6	$0.7046 + 0.2289i$	0.7408	0,0741	0,5488	0,0549
7	$0.7156 + 0.2325i$	0.7524	0,0752	0,5661	0,0566
8	$0.7253 + 0.2357i$	0.7626	0,0763	0,5816	0,0582
9	$0.7340 + 0.2385i$	0.7718	0,0772	0,5956	0,0596
Total	–	–	**0.6440**	–	**0,4628**

Tabela 3. 2 – Cálculo da norma-2 do erro global, para h=0.1.

Fonte: elaborada pelo autor.

$$\|E^h\|_1 = h\sum_{j=1}^{9}\left|E_j^h\right| = 0.6440. \tag{3.9a}$$

$$\|E^h\|_2 = \left(0.1\sum_{j=1}^{9}\left|E_j^h\right|^2\right)^{1/2} = \sqrt{0.1\sum_{j=1}^{9}\left|E_j^{0.1}\right|^2} = \sqrt{0{,}4628} = 0.6803. \tag{3.9b}$$

O ETL é determinado pela Equação (2.13). A segunda derivada de (3.6) é:

$$u''(x) = x^2 \tag{3.10}$$

e a quarta derivada é:

$$u''''(x) = 2. \tag{3.11}$$

Substituir (3.9) e (3.10) na Equação (2.13), temos:

$$\tau_j = \left[x_j^2 + \frac{1}{12}h^2(2) + O(h^4)\right] - x_j^2 .$$

Cancelar x_j^2 com - x_j^2:

$$\tau_j = \frac{1}{6}h^2 + O(h^4) . \tag{3.11a}$$

$$\tau_j = +\frac{1}{12}(0.01)(2) + O(h^4) = 0{,}00167 = 1.67\times10^{-3} = 0.167h^2$$

e a precisão $O(h^2)$ e assim $\tau_j=O(h^2)$ quando h → 0.

O vetor erro de truncamento local τ é:

$$\tau = A\hat{U} - F. \tag{3.12}$$

Assim,

$$\tau = \begin{bmatrix} 1.7\times10^{-3} \\ 1.7\times10^{-3} \\ 1.6\times10^{-3} \\ 1.7\times10^{-3} \\ 1.7\times10^{-3} \\ 1.7\times10^{-3} \\ 1.7\times10^{-3} \\ 1.7\times10^{-3} \\ -8.3317 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tau^h = \begin{bmatrix} 0.5285 \\ 0.5285 \\ 0.5253 \\ 0.5285 \\ 0.5285 \\ 0.6229 \\ 0.5285 \\ 0.6236 \\ 1.1757 + 0.3820i \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

A estabilidade é determinada pela Equação (2.17), cuja solução é

$$E = -(A^h)^{-1}\tau^h. \tag{3.14}$$

Devemos observar que se calcularmos a norma do erro global (3.14), nós vamos ter a considerar a condição (2.18).

$$\|E^h\| \leq C\|\tau^h\|$$

Com o auxílio do Mathematica[8], nós obtemos a norma de E^h e a de τ^h, que são respectivamente, 6.43974 e 5.45579. Dividir a primeira pela segunda, temos o valor de *C*:

$$C = 1.18035. \tag{3.14a}$$

Sendo assim, a norma de $-(A^h)^{-1}$ deverá ser menor ou igual a C, para que o sistema seja estável.

A norma de $-(A^h)^{-1}$, calculada com o auxílio do Octave[9] é:

$$\|-(A^h)^{-1}\| = 0.7960, \tag{3.15}$$

que é menor de que *C*. Portanto, o sistema da EDO (3.5) é estável.

A consistência é verificada tomando como parâmetro o erro de truncamento local (τ) em relação a variação de h, tendendo a zero. Por isso, vamos fazer algumas simulações com h=o.1,0.05,0.025,0.0125 e 0.0625 para verificar o que acontece. Não devemos esquecer que os resultados devem obedecer a Equação (2.20):

$$\|\tau^h\| \to 0 \text{ quando } h \to 0.$$

A quarta derivada da função (3.6) é função constante:

$$u''''(x) = 2. \tag{3.16}$$

Na Tabela 3.2, vamos verificar se a solução é *consistente*, utilizando a Equação (2.20):

$$\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0.$$

Utilizando-se da norma-2, temos a relação da quarta derivada de ser numericamente igual a segunda derivada de f, por isso, vamos utilizar a expressão a seguir para verificar a convergência da solução do PVI.

8 Respectivamente, Norm[EG^h, 1] e Norm[ETL^h, 1].
9 norm(-inv(Ah))

$$\|\tau^h\|_2 \approx \frac{1}{12}h^2\|u''''\|_2 = \frac{1}{12}h^2\|f''\|_2. \tag{3.17}$$

A norma-2 para o vetor τ^h_j é medida por:

$$\|\tau\|_2 = \left(h\sum_{j=1}^{m}|\tau_j|^2\right)^{1/2}.$$

h	$\tau_j^h = +\frac{1}{12}h^2u''''(x_j) + O(h^4)$	$\frac{\tau_j}{h^2} < C$	$h(\tau_j^h)^2$
0.1	$\tau_j^{0.1} = +\frac{1}{12}(0.1)^2(2) = 1.67\times10^{-3}$	$0.167h^2$	2.78×10^{-7}
0.05	$\tau_j^{0.05} = 4.17\times10^{-3}$	$0.167h^2$	8,68E-09
0.025	$\tau_j^{0.025}$ =1,04E-04	$0.167h^2$	2,71E-10
0.0125	$\tau_j^{0.0125}$ =2,60E-06	$0.167h^2$	8,45E-14
0.0625	6,50E-06	$0.167h^2$	2,64E-13
⋮	⋮	⋮	⋮
$h\to0$	$\tau\to0$	$\tau_j = O(h^2)$	$\sum_{j=1}^{9} h\left\|\tau_j^h\right\|^2 = 2,87\times10^{-7}$

Tabela 3. 3 – Estudo da consistência do erro de truncamento local em função de h.

Fonte: elaborada pelo autor.

Como a quarta derivada de u(x) é constante, então o τ^h_j é o mesmo para j=1,...,9. A norma-2, é a raiz quadra do somatório da última coluna da Tabela 3.3:

$$\|\tau^h\|_2 = (2,87\times10^{-7})^{1/2} = 5.4\times10^{-4}. \tag{3.17a}$$

$O(h^p)$ erro de truncamento local + estabilidade $\Rightarrow$ $O(h^p)$ erro global.

$$O(h^2) + O(h^2) \Longrightarrow O(h^2)$$
$$0.167h^2 + 3,56O(h^2) \Longrightarrow 3,73O(h^2)$$

Como a matriz A, Equação (3.7), é simétrica, podemos analisar a estabilidade na norma-2, calculando os autovalores com a Equação (2.23) para p=1,2,...,9 e em seguida verificando se atende a definição:

p	$\lambda_p \approx -p^2\pi^2 + O(h^2) = \mu_p$
1	$\lambda_1 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.1\pi) - 1] = -9,7887 \approx -\pi^2$
2	$\lambda_2 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.2\pi) - 1] = -38,1965 \approx -4\pi^2$
3	$\lambda_3 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.3\pi) - 1] = -82,4428 \approx -9\pi^2$
4	$\lambda_4 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.4\pi) - 1] = -138,1964 \approx -16\pi^2$
5	$\lambda_5 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.5\pi) - 1] = -199,9997 \approx -25\pi^2$
6	$\lambda_6 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.6\pi) - 1] = -261,8031 \approx -36\pi^2$
7	$\lambda_7 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.7\pi) - 1] = -317,5567 \approx -49\pi^2$
8	$\lambda_8 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.8\pi) - 1] = -361,8031 \approx -64\pi^2$

9	$\lambda_9 = \frac{2}{(0.1)^2}[\cos(0.9\pi) - 1] = -390{,}2112 \approx -81\pi^2$

Tabela 3. 4 – Autovalores e autovetores para estabilidade na Norma-2.

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com as informações da Tabela 3.3, o raio espectral da matriz A, tomando como base a Equação (3.7), é o seguinte:

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1\leq p\leq 9}|\lambda_9| = 390.2112.$$

Então, tudo o que precisamos fazer é calcular os valores próprios de A e mostrar que eles são limitados longe de zero quando h → 0. Portanto, de acordo com os valores da Tabela 3.3, a medida que h → 0, vimos que ρ(A) cresce até limitar-se a 390.2212 e com isto, o sistema é estável nesta região circular.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se você percebeu, iniciamos estudando sobre PVC de 2-pontos, com as condições de fronteira de Dirichlet, porém como forma de verificar ou estudar qualitativamente a estabilidade de um sistema, consideramos um PVI, em que as condições iniciais só ocorrem em x_0=0. Ambos, requerem grande conhecimento sobre normas de vetores e de matrizes, para se estabelecer se o erro global (E) é limitado pelo erro de truncamento local (τ).

Com os fundamentos apresentados na Seção 2, pudemos estudar a consistência ($\|\tau^h\|\to 0$ quando h→0), a estabilidade ($\|E^h\|\to 0$quando h→0 e a convergência da solução de um PVI por meio do MDF, onde constatamos que a estabilidade está relacionada com os erros Global e Truncamento Local.

De uma maneira geral, precisamos mostrar que erro global é limitado em termos do erro local, por uma constante *C*, tal que $\frac{\|E^h\|}{\|\tau^h\|} \leq C$, ou seja, a norma do $\|E^h\| \leq C\|\tau^h\|$.

No Exemplo da Subseção 3.4, utilizamos m=9 e realizamos um estudo completo com base no referencial teórico, e calculamos o condicionamento da matriz A, que é igual a 50. O ideal seria refinar a malha aumentando o valor de m, na esperança de que daria um bom condicionamento para a matriz A e os resultados num todo seriam satisfatórios.

Mas não é só o condicionamento da matriz A que determina a estabilidade, mas um conjunto de normas, medidas ou distância dentre um conjunto de valores ou elementos de um vetor erro. Como vimos, na subseção 3.4, o PVI é estável para m=9, por atender as definições de estabilidade, consistência e consequentemente convergência, conforme os resultados obtidos nas Equações (2.16a), (2.18), (3.11a), (3.15), (2.19) e (2.20)

Neste caso, deixamos como proposta implementar um algoritmo para um m>0, positivo e fazer simulações computacionais aumentando os valores de m e consequentemente se h→0.

REFERÊNCIAS

LEVEQUE, Randal J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations:** steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: SIAM, 2007. Disponível em: http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/mlss/documentos/LeVequeRJ.pdf. Acesso em: 9 ago. 2021.

KEVORKIAN, J. **Partial Differential Equations**. Pacific Corove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DO PVI , $u''(x)=x^2$, $u(0)=0$ e $u'(0)=1$

Para resolver este PVI vamos integrar duas vezes a EDO:

$$u''(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u'[u'(x) = x^2] \quad \Rightarrow \quad u'[u(x) = \frac{x^3}{3} + c_1] \quad \Rightarrow$$
$$u(x) = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2. \tag{A.1}$$

Para determiner as constantes c_1 e c_2, vamos utilizar as condições iniciais.

$$u(0) = 0 + 0 + c_2 = 0, \text{ logo } c_2 = 0.$$

A primeira derivada de (A.1), é:

$$u'(x) = \frac{x^3}{3} + c_1. \tag{A.2}$$

A primeira derivada em $x_0=0$ é:

$$u'(0) = 0 + c_1 = 1, \text{ logo } c_1 = 1.$$

Portanto, a solução da EDO para as condições iniciais dadas é:

$$u(x) = \frac{x^4}{12} + x. \tag{A.3}$$

APÊNDICE B – EXPANSÃO DA SÉRIE DE TAYLOR PARA O COSSENO

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Para $x=\pi h$, temos:

$$\cos(x) = \frac{(-1)^0}{(0)!}(\pi h)^0 + \frac{(-1)^1}{(2)!}(\pi h)^2 + \frac{(-1)^2}{(4)!}(\pi h)^4 + O(h^6).$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 h^2 + \frac{1}{24}\pi^4 h^4 + O(h^6). \tag{B.1}$$

ANEXO A – EXPANSÃO DA SÉRIE DE TAYLOR

$$u(\bar{x}+h) = u(\bar{x}) + hu(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (1.5a)$$

$$u(\bar{x}-h) = u(\bar{x}) - hu(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (1.5b)$$

$$u(x_j-h) = u(x_j) - hu(x_j) + \frac{1}{2}h^2u''(x_j) - \frac{1}{6}h^3u'''(x_j) + \frac{1}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5)$$

$$u(x_j+h) = u(x_j) + hu(x_j) + \frac{1}{2}h^2u''(x_j) + \frac{1}{6}h^3u'''(x_j) + \frac{1}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5)$$

$$u(x_j-h) + u(x_j+h) = 2u(x_j) + 1h^2u''(x_j) + \frac{2}{24}h^4u''''(x_j) + O(h^5)$$

Expansão de (1.5a) para h=0.1:

$$u(\bar{x}+0.1) = u(\bar{x}) + 0.1u(\bar{x}) + \frac{1}{2}(0.1)^2u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(0.1)^3u'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (1.5a)$$

$$u(\bar{x}+0.1) = u(\bar{x}) + 0.1u(\bar{x}) + \frac{1}{2}(0.01)u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(0.001)u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$u(\bar{x}+10^{-1}) = u(\bar{x}) + 10^{-1}u(\bar{x}) + 0.005u''(\bar{x}) + 0.0017u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$u(\bar{x}+10^{-1}) = u(\bar{x}) + 10^{-1}u(\bar{x}) + 5\times10^{-3}u''(\bar{x}) + 1.7\times10^{-3}u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

CAPÍTULO 20

O USO DE *PODCAST* NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA AOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 01/03/2022

Deyse Mara Nieto Lyrio
Mestranda em Ensino na Educação Básica pela Universidade Federal do Espírito Santo
São Mateus, ES, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-6749-5771
http://lattes.cnpq.br/4207142042803115

Elizabeth Cristina Oliveira Pontes
Graduanda em Física Licenciatura pela Universidade Federal do Espírito Santo
São Mateus, ES, Brasil
https://orcid.org/0000-0001-9166-9436
http://lattes.cnpq.br/5267902829021052

Valdinei Cezar Cardoso
Professor do programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica na Universidade Federal do Espírito Santo
São Mateus, ES, Brasil

RESUMO: O presente artigo, é uma pesquisa qualitativa cujos dados foram coletados por meio do Google Scholar, e apresenta as contribuições da tecnologia no ambiente escolar, com o uso do *podcast* como recurso para o ensino de elementos da Educação Financeira. Constatamos que o ensino da Educação Financeira por meio do *podcast*, proporciona um ensino mais criativo, interativo, com mais autonomia e criticidade voltado às características da realidade dos alunos. Estamos vivendo numa sociedade com reflexos de uma globalização acelerada, totalmente digital, um mundo cada vez mais com informações em milésimos de segundos, com um nível crescente no consumo, levando muitas pessoas a se endividar, devido aos gastos desnecessários e falta de controle nos gastos desnecessários. Então surge a necessidade de uma formação que inicie dentro das escolas para que os cidadãos que consigam administrar suas finanças. Este trabalho tem como objetivo ensinar aos alunos do Ensino Médio, de que forma os *podcasts*, poderão guiar os alunos a serem protagonistas da investigação para aprender a Matemática Financeira, com abordagens de temas do dia a dia, para a formação de cidadãos mais conscientes e sem endividamento. A análise dos dados indica que o uso das ferramentas digitais no campo educacional, traz novas possibilidades de um ensino mais criativo e proativo.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino aprendizagem; Matemática Financeira; Ensino Médio; *podcast*.

THE USE OF *PODCAST* IN THE TEACHING OF FINANCIAL MATHEMATICS TO HIGH SCHOOL STUDENTS

ABSTRACT: This article is a qualitative research whose data were collected through Google Scholar, and presents the contributions of technology in the school environment, using the podcast as a resource for teaching elements of Financial Education. We found that the teaching of Financial Education through the podcast, provides a more creative, interactive teaching, with more autonomy and criticality focused on the characteristics of the students' reality. We are living in a society with the reflexes of an accelerated globalization, totally digital, a world

increasingly with information in milliseconds, with a growing level of consumption, leading many people to get into debt, due to unnecessary expenses and lack of control over spending. unnecessary. So there is a need for training that begins within schools so that citizens can manage their finances. This work aims to teach high school students how podcasts can guide students to be protagonists of research to learn Financial Mathematics, with approaches to everyday topics, for the formation of more conscious and informed citizens. no indebtedness. Data analysis indicates that the use of digital tools in the educational field brings new possibilities for a more creative and proactive teaching.
KEYWORDS: Teaching-learning; Financial math; High school; *podcast*.

1 I INTRODUÇÃO

Diante dos avanços tecnológicos junto à globalização, possibilita ao estudante os aparelhos móveis que foram surgindo e agregando possibilidades de forma flexiva, na qual o aluno tem posição de criador o que contribui muito para o enriquecimento dos processos de ensino e aprendizagem.

Essa maneira tímida dos avanços tecnológicos, se dá pela falta de estruturas de algumas escolas públicas ou municipais, pela falta de investimento ou até mesmo, falta de suporte para melhor trabalhar as novas concepções tecnológicas que estão surgindo, principalmente neste período de pandemia do coronavírus.

As tecnologias da informação e comunicação, as mídias e aplicativos digitais, os dispositivos móveis, estão cada vez mais presentes nas escolas, no nosso cotidiano, lazer e entretenimento (BELLONI, 2009). Então a tarefa de ensinar e motivar o aluno, está cada vez mais difícil, sendo considerado um grande desafio para despertar o interesse do aluno pelo aprendizado.

Segundo Moran (2017) as mudanças nas escolas, não dependem exclusivamente dos professores, mas da motivação dos alunos. Para facilitar o processo e garantir os melhores resultados entre a parceria nesta caminhada do professor-educador.

Skovsmose (2020) apresenta que a Educação Matemática tem como potencial romper uma tendência tradicional na adaptação dos alunos ao que está apresentado pela sociedade e, assim inspirado no trabalho de Paulo Freire, afirma que é possível romper rotinas que privilegiam a opressão e a subordinação, em direção ao desenvolvimento para uma cidadania mais crítica.

Segundo (SKOVSMOSE,2014, p.106) há a proposta de uma sala de aula com vários cenários, com competências voltadas na compreensão da situação social e política por meio da Matemática, com uma visão de ler o mundo através dos números e gráficos, ao invés de escrevê-los ao estar as mudanças.

Para abrir e ampliar discussões em sala de aula sobre a Educação Financeira exige um esforço que contemple em especial os alunos que são futuros professores de Matemática, na qual se requer um trabalho de ensino, desde a educação básica, abordando

assim desde o consumo ético e responsável taxas e índices de natureza socioeconômica e habilidade de produzir seus argumentos e tomar decisões, entre outros, conforme destaque em BRASIL 2018.

Ataides (2020) discute acerca do *Podcast*, valioso para as pessoas que buscam aprender de forma autônoma, incentivando que os discentes e instituições de ensino criem seus próprios programas de *Podcast*, gerando mais possibilidades para a aprendizagem e encorajando para que novas investigações sejam feitas a respeito enquanto mídia educativa no Brasil.

Do ponto de vista educacional, o *Podcast*, vem para tentar contribuir (como uma opção a mais) ao processo de ensino e de aprendizagem, estimulando o saber da educação financeira, ensinando desde o conceito da inflação até chegar nas fórmulas de juros simples e compostos (explicar o que isso tem a ver com o cotidiano dos alunos).

Acredita-se que o uso do *Podcast*, pode favorecer o desenvolvimento de habilidades e competências na construção de conhecimentos acerca da educação financeira junto aos alunos do Ensino Médio.

Com tantas informações junto às tecnologias que geram sobrecarga das informações. Precisamos de respostas mais imediatas a todo o momento. Dentro deste contexto que estamos inseridos, em um mundo totalmente capitalista que visa um lucro mais do que esperado, preços com oscilações a todo o momento e inesperado e mercados competitivos, as pessoas estão sujeitas ao incentivo do consumo desenfreado, junto de propagandas de um marketing digital em maior frequência, influenciando cada vez mais as decisões dos consumidores, com facilidades de pagamentos e promoções (CAMPOS, 2012).

Diante destas ciladas de parcelamentos, juros baixos e várias formas de apresentação de produtos na *internet*, os consumidores vão se deixando levar pelo impulso e gastam o que tem e o que não tem, e daí se perdem em seus orçamentos planejados ou não planejados.

Dados retirados no site da Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic) realizada pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), apontam que os brasileiros estão em crescentes índices de endividamentos em 2020, com uma média de 66% de consumidores endividados, chegando uma porcentagem anual da pesquisa, iniciada em 2010 (CNC, 2021).

De acordo com a mídia muitos brasileiros têm dificuldades na administração de suas finanças. Então percebe-se uma necessidade de orientação e abordagem ao incentivo da educação financeira, no percurso de todos os níveis de ensino sendo preciso que a educação financeira seja trabalhada desde cedo, preparando os alunos no contexto atual, desenvolvendo uma conscientização financeira, com aulas que possam abordar ferramentas tecnológicas e com informações precisas e orientadas e assim serem repassadas para as famílias de modo geral e aos poucos formar uma sociedade mais consciente e menos endividada.

Segundo reportagem de G1 (2021), informado pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), apresentou que o número de brasileiros endividados, alcançou um recorde histórico desde o ano de 2010. O reflexo desse endividamento, é a junção de fatores ruins da economia, com uma inflação elevada, redução de estímulos sociais criado pela pandemia do coronavírus e os níveis altos de desemprego. Esses fatores diminuem o poder de compra e deterioram os orçamentos domésticos.

Segundo José Roberto Tadros, presidente da (CNC,2021) o mercado de trabalho formal e informal, está fragilizado com a renda dos consumidores, bem afetada neste período de pandemia da Covid-19 e com a redução do valor do Auxílio Emergencial deste ano, que está sendo pago com um valor bem menor em relação ao ano de 2020.

Os números são preocupantes, porque com o aumento do endividamento pode levar a um potencial de crescimento da inadimplência. Segundo a CNC, o tempo médio de atraso na quitação das dívidas, aumentou pela segunda vez, atingindo 61,9 dias em julho, maior prazo desde fevereiro. Com isso, fica evidente que o brasileiro está precisando de mais prazo para estar quitando seus compromissos, mas mesmo diante de todo esse cenário crítico de crise, os brasileiros de modo geral não têm o ensino de uma educação financeira que venha dos ensinamentos desde a infância até a sua fase adulta.

Segundo Kenski (2013, p. 87), relata que com as constantes modificações, as enxurradas de informações que prendem nossa atenção e assim dispomos de uma profundidade que "é múltipla, mutante, fragmentada, de várias nuanças, nos tornando impotentes em determinadas situações. Assim, cabe às instituições de ensino planejar proposta pedagógica, com ferramentas tecnológicas, para que possam nortear aos alunos um ensino não como consumidores de informações, mas como produtores, adeptos a uma leitura e entendimento mais crítico das enxurradas de informações".

Dentro dessa perspectiva, iremos abordar o uso com o *podcast* como uma ferramenta tecnológica, que possibilita o desenvolvimento de uma aprendizagem criativa, que estimula a implementação do pensamento crítico e as habilidades dos alunos do Ensino Médio, com relevância no ensino da Educação Financeira, por meio de áudios para o desenvolvimento das atividades pedagógicas.

Bruck e Costa (2016, p.284), definem o *podcast* como,

> [....] uma ferramenta mediática, cuja principal função é abordar diversos conteúdos em formatos distintos através das plataformas digitais. Vinculadas a diversos conteúdos sonoros. Sendo considerado a junção do rádio tradicional e com a difusão de conteúdo da *internet*.

Em meio à pandemia, a utilização do *podcast* vem se tornando uma ferramenta de fortalecimento do ensino e da aprendizagem no ensino à distância (CRISTOVÃO; CABRAL, 2013).

O papel dos educadores nessa constituição é fundamental, porque além disso, leva a criatividade que está relacionada à competência socioemocional instituída pela nova BNCC

- Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). A aprendizagem criativa proporciona uma perspectiva de trabalho por meio de diferentes linguagens, por um enfoque voltado a questões artísticas e tecnológicas na promoção do aprendizado com autonomia, bem como no desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo.

O artigo busca evidenciar a ideia em que os alunos possam ser autores na construção do ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática Financeira, desde que tenham as orientações diante de como deve ser feito as gravações, edições e publicações dos áudios, através do *podcast*, fortalecendo a comunicação, interação com uma ampliação de tempo e espaço, no processo educacional, seja ele no presencial, híbrido ou exclusivamente online.

1.1 Referencial teórico

1.1.1 Podcast uma tecnologia inovadora em contexto escolar

Uma ferramenta integrada com a TIC[1] o *podcast* visou uma implementação de metodologias e estratégias inovadoras, como arquivos de áudio que podem ser ouvidos utilizando um celular *smartphone*, *tablet* ou computador. Como ouvir aulas quantas vezes quiser, que são capazes de revolucionar o ensino com maior autonomia e domínio das mídias em busca do ensino e da aprendizagem, favorecendo a interação, aguçando a criatividade e fomentando a autonomia e confiança dos alunos.

Uma ferramenta digital descomplicada de utilizar, que pode ser tanto em um ambiente escolar, quanto fora, como em assuntos diversos como política, saúde, jornalismo, curiosidades entre outros. Com uma flexibilidade e variados temas para serem trabalhados em salas de aula, com diversas disciplinas, sendo que a informação via *podcast* aprecia um modelo educacional de forma horizontal livre e hierárquica, tendo diálogos, debates e conteúdo (ATAIDES, 2020; SAIDELLES et al., 2018).

O *podcast* sucede na combinação das palavras *IPOD*[2] e Broadcasting[3] e é o local onde os arquivos em formato de áudio, estão hospedados e disponíveis para carregamento na forma de episódios. O *podcasting* refere-se ao ato de gravar ou divulgar os arquivos na *WEB* e o *podcaster* relaciona-se ao autor dos arquivos em áudio (BOTTENTUIT JUNIOR et al., 2007).

Segundo Chen (2007), citado por Junior e Coutinho, com a crescente popularidade do *podcast*, apresentou os seguintes números a respeito dos *podcast*s e suas características, e formas de produzir, entre outros. Permite um microfone, um computador e uma ligação à *internet* para publicação dos seus arquivos de áudio. Os arquivos do *podcast* podem ser automaticamente hospedados para um dispositivo móvel a serem ouvidos quando e onde seja mais conveniente; de forma gratuita; os utilizadores não precisam pagar para

1 Tecnologia da Informação e Comunicação.
2 Aparelho de informação da marca Apple.
3 Transmissão de informação via rádio ou TV.

descarregar os arquivos escritos do *podcast*.

A aplicação do *podcast* no contexto escolar tem potencial de ser empregada em contribuição no entendimento de conteúdos, tal como em Matemática pode ser empregada no esclarecimento de dúvidas em exercícios resolvidos dentro da sala de aula ou dever de casa. Assim, o educador pode criar os *podcast*s baseados nas dificuldades de seus alunos.

Um exemplo para estudar sobre o tema da Educação Financeira, pode iniciar uma aula de *podcast* , apresentando do tema da inflação, comparando um valor de um ano a outro sobre os produtos, se você consegue comprar hoje o mesmo produto que comprova a um ano atrás , com o mesmo salário de hoje, daí você já pode entrar na crise financeira econômica, abordar sobre bolsa de valores, já passando pela Matemática Financeira, apresentando a regra de três e os percentuais, até chegar em juros simples e juros compostos. Com essa praticidade, são abordados vários cálculos em apenas quinze minutos de áudio com fundos musicais criativos e com isso, os alunos assimilam todo o conteúdo bem mais rápido e prático.

Lopes, Machado e Coutinho (2019), afirma que o *podcast* é uma ferramenta digital, para o auxílio no aprendizado de Matemática, dado que apresenta capacidade didática em ser uma ferramenta eficiente para apoiar pesquisas de conteúdos, independentes do conceito matemático a que se refere. Talvez seja por esse motivo que, somado ao fator novidade, os alunos demonstraram maior interesse no *podcast* como uma explicação em áudio do exercício, informações não implícitas na resolução escrita.

1.1.2 A inserção da matemática financeira em sala de aula

A inserção da Matemática Financeira, visa abordar na necessidade de o aluno saber interpretar e ter a leitura por meio de distintas formas da linguagem matemática.

Segundo Sá (2012), a Matemática Financeira nos oferece para compreender as temáticas transversais em defesa da formação docente para trazer as discussões acerca dos problemas inseridos na escola, como democracia, cidadania, trabalho e consumo.

Para uma abordagem em sala de aula, sobre um tema como consumo, aponta que:

O professor pode apresentar uma discussão em análise das propagandas enganosas, das compras financiadas, sobre cartões de crédito, endividamento, cheques especiais, abordando suas vantagens e desvantagens. “Sendo que passa essa abordagem em Matemática Financeira o professor necessita da formação da disciplina baseado na matriz curricular “ (Sá, 2012, p. 27).

Segundo Sá (2012), apresenta que, quase nenhuma das disciplinas obrigatórias, ou mesmo optativas, forneça na realidade um preparo político e democrático dos alunos/ cidadãos do ensino da Matemática Financeira.

Segundo a pesquisadora Chiarello (2014), argumenta-se numa formação de professores voltada às práticas coletivas de rede, voltada às noções de cidadania e com

solidariedade aos alunos, remetendo ao ensino em sala de aula.

Segundo Chiarello (2014), os educadores podem possibilitar relações com o dinheiro, estimulando a importância de traçar sonhos, sem precisar mapear receitas para que os alunos aprendam.

Desde a promulgação em 2018, com a implementação da BNCC, avançou no sentido de: estabelecer um regime de colaboração entre estados e municípios: realizando assim um planejamento estratégico; formando equipes de estudos e (re)elaboração de currículos pelas secretarias de educação; e oferecer apoio técnico e financeiro para os entes federativos. Contudo até 2022 os focos serão; garantir a formação continuada, com orientações, planos locais, material de apoio e equipes de formação local, apoio às escolas na revisão de projetos político- pedagógicos (PPP), formando equipe para as escolhas à Base; e assim estruturar o sistema de acompanhamento e avaliação da aprendizagem aos estudantes segundo a BNCC.

A Educação Financeira, inserida na BNCC em 2018, vem sendo abordada de forma transversal pelas escolas, ou seja, nas aulas e projetos. Então prevê um ensino da Educação Financeira, ensinando nas escolas, desde a educação infantil até o Ensino Médio. Segundo parecer do Conselho Nacional de Educação (CNE), homologado pelo Ministério da Educação (MEC), prevê que as redes de ensino se adequem aos currículos da educação infantil, fundamental e médio.

> É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando um estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedade diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e proporcionando contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos (MEC, BNCC, 2018, p. 269).

No Ensino Médio, a Educação Financeira está relacionada à competência específica 3:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (MEC, BNCC, 2018, p. 531).

A importância do ensino da Educação Financeira no currículo da Educação Infantil até o Ensino Médio, possibilita uma visão de ensino com estratégias mais voltadas ao ensino do consumo acelerado e implementando um ensino de poupar mais do que gastar principalmente em tempos atuais de crises, gerados pela pandemia do coronavírus.

1.1.3 Podcast no Ensino da Matemática

O *Podcast* possibilita uma criação de um ambiente de conversação de áudio, diferentemente do livro físico, o aluno pode ouvir as informações atualizadas e em tempo real, uma eficiência da *internet*, graças aos avanços tecnológicos, com cenários mais intensos voltada ao ensino e aprendizagem. Sendo capaz de serem usados em áudios no aplicativo Whatsapp ou Websites, na busca por alternativas para melhor aprimorar e adequar ao meio. Bottentuit Junior e Coutinho (2008b, p.136), destacam que: "A ferramenta do *podcast* serve como complemento às atividades didáticas, para uma melhor compreensão dos conteúdos, que possibilita ouvir as aulas independente do lugar e espaço. Facilitando na melhor comunicação dos ambientes virtuais de aprendizagem nos ambientes textuais".

A inserção dos *podcast*, ao ensino e à aprendizagem, favorece no entendimento dos conteúdos curriculares por meio da análise e interpretação de informações acerca do conteúdo, sendo que tal recurso evidencia uma oportunidade para estimular a comunicação oral, pois é uma das habilidades de interação verbal em que usamos a linguagem de fato.

Em Lopes, Machado, Coutinho (2019), analisa como os alunos do 11° ano em uma escola em Portugal, utiliza os *podcast*s disponíveis em um material de apoio ao estudo em Matemática, a autora concluiu que a maioria dos discentes, gostaram do seu uso como um auxílio para o ensino. Isso demonstra o grande potencial do *podcast* como um auxílio à educação, pelo fato dele ser um instrumento acessível, fácil adesão e prático para aplicá-lo dentro e fora da sala de aula. Para melhor entendimento ao áudio, por exemplo, o professor pode implementar uma resolução das atividades discutidas no *podcast*.

Em Lopes (2009), a autora fez a seguinte pergunta para os discentes da pesquisa: "Qual a tua opinião sobre os materiais disponibilizados no site? Qual gostaste mais? Gostaria de voltar a usar este tipo de materiais?", foi notório a preferência dos estudantes aos *podcast*s, não apenas pelo motivo novidade, mas também pelo fato de reproduzir o que as explicações que a professora solucionou durante a aula, além de poder escutar diversas vezes sem precisar da professora.

De maneira adequada a aplicação dos *podcast*s pode ser um recurso didático em âmbito educacional, pelo fato de ser prático e dinâmico para o cotidiano .Dessa maneira, nosso trabalho tem como objetivo ensinar aos alunos do Ensino Médio, de que forma os *Podcast*s poderão ser utilizados, onde serão viáveis para guiar aos alunos e serem protagonistas da investigação para aprender a Matemática Financeira, de uma forma mais contextualizada com abordagens do dia a dia, para a formação de cidadãos mais conscientes e sem endividamento. Se caracterizando como uma pesquisa de natureza qualitativa e exploratória.

2 | METODOLOGIA

A pesquisa apresenta abordagem qualitativa. Os dados foram coletados por meio da plataforma Google *Scholar*, no período de 2000 até 2020, contendo como descritores as palavras "*Podcast*" + "Matemática Financeira" + "Ensino Médio" e "*podcast*" + "*Financial mathematics*" + "*High school*". Com base nas buscas, identificamos 31 trabalhos em português para serem avaliados e 9 trabalhos em versão inglês, sendo empregado como critério para inclusão de análise, aqueles que estão se referindo ao uso do *podcast* no ensino da Matemática Financeira aos alunos do Ensino Médio. Foram avaliados para pesquisas trabalhos em português e inglês. Para enfatizar o objetivo geral do artigo, levamos em consideração a pesquisa qualitativa, com base em Lüdke e André (2012) que apresenta, descreve, compreende e explica os dados coletados a partir das dissertações e contribuições sobre o ensino da Matemática com o uso do *podcast*.

Onde será abordado um produto educacional, que será apresentado pelos professores, como modelo de proposta de ensino aos alunos, com o uso da ferramenta *podcast* para o ensino da Matemática Financeira em sala de aula, com produção e envio nas plataformas como didática de ensino-aprendizagem.

3 | PROPOSTA DO PRODUTO EDUCACIONAL

O presente trabalho visa, uma apresentação de uma proposta do produto educacional, o *Podcast* como ferramenta de mídia digital para o ensino de Matemática Financeira aos alunos do Ensino Médio, para que possam ser encorajados a inovar, criar, gravar e publicar uma situação do dia a dia da Educação Financeira. Envolvendo conteúdos e situações ao tema proposto.

3.1 Tipo do produto:

"*Podcast"*

3.2 Objetivo:

Trabalhar e apresentar um episódio de Matemática Financeira, associada a situação do cotidiano do aluno, estimulando a reflexão e análise crítica do conteúdo estudado e aplicado, para resolver o que foi proposto.

3.3 Público-alvo:

2º ano do Ensino Médio

3.4 Descrição do produto:

O produto educacional proposto neste trabalho, "o *Podcast* no ensino da Matemática Financeira", com a intenção de trabalhar sobre os temas como: inflação, crise econômica, bolsa de valores, porcentagem, percentual, podendo ser tudo em um único episódio ou episódios de cada tópico separado.

Importante destacar, que cabe ao professor orientar os alunos sobre o uso de software gratuitos para gravar os episódios, como o Audacity (software livre de edição digital de áudio disponível principalmente nas plataformas Windows, Linux e Mac.

Figura 1: Apresentação como modelo de *podcast* de Matemática Financeira da Brasil Escola, que visa despertar a curiosidade do aluno e engajá-lo na atividade proposta.

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/podcast/matematica-financeira.htm

Este exemplo acima, visa incentivar o aluno a se posicionar como um autor criativo, crítico e flexível, apresentando suas habilidades no lúdico e aprendendo de forma diferenciada, junto a mídia digital *podcast*.

3.5 Dinâmica da atividade na prática

Assim, para cada etapa sugerida, os alunos receberam as orientações para melhor direcionamento para o material de apoio, no desenvolvimento da atividade proposta. Sugere-se que os professores estimulem os alunos com as propostas da criação do *podcast* no ensino da Matemática Financeira. Apresentando assim, seguir as regras e realizar as instruções descritas para a criação do *podcast* em sala de aula.

Neste caso, os professores apresentam todo material necessário, como espaço, orientações de sites, vídeos para favorecer na criatividade destes alunos e incentivá-los na criação de algo novo, diferenciado para que não possa ser uma cópia ou réplica dos demais colegas. Fazer desta aula com muita interação e organização e assim informar aos alunos o critério de avaliação e pontuação, concluindo a importância desta ferramenta digital para o melhor resultado na aprendizagem.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

A cada ano que se passa, nossos discentes, estão mais envolvidos aos interesses para o uso da tecnologia do ensino e acaba menos motivados para o ensino tradicional. Deste modo, os professores necessitam inovar suas metodologias de ensino se adaptando às novas tecnologias e ferramentas digitais (VILATTE, 2005).

Nesta perspectiva é importante compreender a tecnologia no âmbito educacional

como uma ferramenta que auxilia no ensino, tornando- se preciso analisar os trabalhos para este fim. Desta forma, este trabalho refere-se aos dados coletados, a partir das dissertações e artigos sobre o que está sendo criado em relação ao uso do *podcast* no ensino da Matemática Financeira aos alunos do Ensino Médio. Ao analisar os trabalhos escritos em português, percebe-se que ocorre uma certa dificuldade de encontrar trabalhos acadêmicos relacionados especificamente ao uso de *podcast* no ensino da Matemática Financeira aos alunos do Ensino Médio.

A maior parte deles não abordam sobre a utilização do *podcast* no ensino da Matemática Financeira aos alunos do Ensino Médio e quando abordam, em geral, são inseridos como exemplos de ferramentas tecnológicas para ensino. Além disso, pode-se perceber que existem poucos trabalhos relacionados ao uso do *podcast* no contexto educacional na matéria de Matemática. Em inglês foi verificada a ausência de trabalhos abordando o assunto sobre a aplicação do *podcast* na Matemática Financeira no Ensino Médio, nem sequer sobre o uso do *podcast* no tema de Matemática. Mostrando assim que em no período dos anos 2000 a 2020 não houve nenhuma mudança neste cenário.

A área da Matemática e suas Tecnologias na BNCC em suas competências gerais já estabelece diversos aspectos em relação as Tecnologias digitais. Segundo Aguiar (2008, p.63) para o docente de Matemática "o uso das novas tecnologias propicia trabalhar em sala de aula com investigação e experimentação na Matemática, considerando que permite ao aprendiz vivenciar experiências, interferir, fomentar e construir o próprio conhecimento".

Segundo Kripka et al. (2017), a aplicação das tecnologias digitais com alunos ao se estudar Matemática, motiva e desperta seu interesse, além de permitir explorar variados registro de representação, permitindo assim atividades que favorece o esclarecimento de problemas e conteúdos. Dessa maneira o uso das TIC proporciona um maior compartilhamento do discente com modos e meios para organizar sua própria experiência, além de possibilitar melhor entendimento de temas diversos em qualquer área, tendo como exemplo, a Educação Financeira.

Nas escolas a Educação Financeira de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ela é dada como um tema transversal para ser trabalhado em todas as disciplinas. No Ensino Médio a Educação Financeira na matéria de Matemática é apresentada no contexto de Matemática Financeira.

A Matemática Financeira de acordo com a BNCC, durante todo o ensino médio (1° ao 3° ano) é apresentada nas seguintes habilidades: EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT203, EM13MAT303, EM13MAT304, EM13MAT305 e EM13MAT503, voltadas para questões pessoais, como por exemplo, investimento, orçamentos, sustentabilidades, ligadas com as tecnologias digitais.

Vejamos um exemplo no Ensino Médio, a habilidade EM13MAT503:

> Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais (MEC, BNCC 2018, p. 541).

Observamos aqui, a menção do uso de tecnologias, com a junção do conteúdo de números e álgebra, envolvendo a Matemática Financeira. Tendo como exemplo, a utilização do *podcast* como uma ferramenta tecnológica digital ao auxílio da explicação, envolvendo números e álgebra, sendo capaz de ser escutado na ocasião mais favorável para o aluno. O professor será capaz de criar ou encontrar um *podcast* do tema desejado, oferecendo aos seus discentes uma nova contribuição em relação a matéria lecionada naquele momento. Os estudantes podem ser protagonistas da investigação para aprender a Matemática Financeira. Além de pesquisar e escutar, os alunos podem fazer e transmitir novos *podcast*s para possuir mais matérias sobre o assunto. Desta forma o professor, a título de exemplo, poderá solicitar aos seus discentes a criação de *podcast*s como forma de avaliação.

Deste modo sugere-se que os docentes incentivam seus discentes com propostas estimulantes relacionado ao conteúdo passado. Como uso do *podcast*, o professor poderá utilizá-lo em diferentes cenários, tanto em sala de aula, quanto fora. Vale ressaltar que para a criação de *podcast* o educador necessita tomar certos cuidados em sua criação, em razão disso, em atividades de criação de *podcast*, aconselha ao professor disponibilizem diferentes materiais para auxiliar o aluno em sua elaboração. Ao criar é importante que seja requisitado aos estudantes na criação de algo novo, podendo assim servir para materiais a serem empregados no futuro, além de instigar o aluno a compreender o conteúdo de maneira diferente do habitual.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

É preciso destacar que o aprendizado com o *Podcast* frente aos processos educativos, nos remete a um olhar mais crítico aos estudantes e uma aprendizagem de forma mais autônoma pelos discentes e com maior clareza no dia a dia da sala de aula.

Percebemos que o uso do *Podcast* no ensino da Matemática aos alunos de Ensino Médio, visa implementar no ensino aprendizagem, potencializando as aulas, deixando as aulas mais criativas, com mais interação e habilidades, propiciando uma melhora na construção do conhecimento.

A inserção do ensino da Educação Financeira segundo a BNCC, no ano de 2018, promoveu um ensino do estudo do dinheiro na sociedade, em relação ao dinheiro no tempo, sendo de grande importância para ensinar aos alunos sobre o consumismo e o saber poupar para investir.

Além disso, compreendemos que é possível aprender e produzir materiais do ensino da Matemática Financeira, através de ferramentas tecnológicas, conforme uma didática

pedagógica, lúdica e cognitiva, ao modo de buscar e intensificar as aulas e melhorando um ensino mais claro e objetivo com mais interesse e participação dos alunos.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Eliane Vigneron Barreto. **As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem**. Vértices, Campos dos Goytacazes, v. 10, n. 1, p. 63-72, jan.-dez. 2008.

ATAIDES, Raila Spindola de**. As percepções de alunos de ensino médio sobre o processo de ensino - aprendizagem a partir do consumo e interação com *podcast*s educativos**. 2020. 100 f., il. Dissertação (Mestrado em Educação) —Universidade de Brasília, Brasília, 2020. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/40168. Acesso em: 28 jul. 2021.

BELLONI, Maria Luiza. **Educação a Distância**. 6ª Ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf Acesso em: 27 ago. 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acessado em: 27 mai. 2021

BOTTENTUIT JUNIOR, J. B; COUTINHO, C. P. ***podcast* em Educação: um contributo para o estado da arte**. Universidade do Minho. BARCA, A. [et al.], ed. lit. – "Congresso Internacional Galego-português de Psicopedagogia : libro de altas". A Coruña : Universidade, 2007. p. 837-846.6. Disponível em: http://hdl.handle.net/1822/7094. Acesso em: 28 jul. 2021

BOTTENTUIT JUNIOR, J. B.; COUTINHO, C. P. Recomendações para produção de *podcast*s e vantagens na utilização em ambientes virtuais de aprendizagem. **Prisma.com** (Portugal), n. 6, p. 125-140, 2008. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11959/brapci/72868. Acesso em: 28 jul. de 2021.

BRUCK, M. S; COSTA, C. I. A. *podcast* Serial: notas sobre acontecimento e processos de mediação. **Culturas Midiáticas**, v. 9, p. 282-297, 2016.

CAMPOS, M. B. **Educação financeira na matemática do ensino fundamental: uma análise da produção de significados**. 2012. 179 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/05/Disserta%c3%a7%c3%a3o-_-Marcelo-Bergamini-Campos.pdf. Acesso em: 27 ago. de 2021.

CHIARELLO, Ana Paula Rohrbek; BERNARDI, Luci Marchiori dos Santos. **Educação financeira crítica: novos desafios na formação continuada de professores**. 2014. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Comunitária da Região do Chapecó, Chapecó/SC, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/283197136_EDUCACAO_FINANCEIRA_CRITICA_NOVOS_DESAFIOS_NA_FORMACAO_CONTINUADA_DE_PROFESSORES. Acesso: 04 ago.2021. DOI: 10.4322/gepem.2015.026.

CRISTOVÃO, Vera Lúcia Lopes; CABRAL, Vinicius Neves. *podcast*s: características nas produções de professores em formação continuada. **Revista de Estudos da Linguagem**, [S.l.], v. 21, n. 1, p. 189-222, jun. 2013. ISSN 2237-2083. Disponível em: http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/relin/article/view/5097. Acesso em: 13 set. 2021. DOI: http://dx.doi.org/10.17851/2237-2083.21.1.189-222.

Endividamento Chega a Recorde de 71,4% dos brasileiros, segundo a CNC**.Portal.G1.com**. 05 ago.2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/08/05/endividamento-chega-a-recorde-de-714percent-dos-brasileiros-segundo-a-cnc.ghtml. Acesso em: 20 ago. 2021.

Estratégia Nacional de Educação Financeira – Plano Diretor da ENEF. 2011. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/enef/?doing_wp_cron=1631563743.4238209724426269531250. Acesso em: 21 de agosto de 2021.

KRIPKA, R. M. L.; KRIPKA, M.; PANDOLFO, P. C. N.; PEREIRA, L. H. F.; VIALI, L. LAHM, R.A. **Aprendizagem de Álgebra Linear**: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas. In: Acta Scientiae, Canoas/RS, v.19, n.4, p.544-562. 2017.

MARINELI, Rodrigo Chechi. **Instrumento lúdico para o ensino-aprendizagem de Ciências e Tecnologias na Educação de Jovens e Adultos: a plataforma Edmodo**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), faculdade de ciências. Repositório Institucional UNESP, Bauru, p.217, 4 de fev.2021. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/202765. Acesso em: 28 jul. 2021.

Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática (3.º e 4.º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

_____ Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais** (ensino médio). Brasília: MEC, 2000a.

_____. **Parâmetros curriculares nacionais**: apresentação dos temas transversais. 2. ed. Brasília: MEC/Secretaria da Educação Fundamental; Rio de Janeiro: DP&A, 2000b.

MONTEIRO, Jean Carlos da Silva. Tiktok como novo suporte midiático para a aprendizagem criativa. **Revista Latino-Americana de Estudos Científicos**, V. 01, N.02, p. 5 ao 20, 13 jul. 2020. Disponível em: https://periodicos.ufes.br/ipa/article/view/30795. Acesso em :28 jul. 2021.

Número de brasileiros endividados em 2020 foi o maior em 11 anos. **CNC**, 2021. Disponível em: http://cnc.org.br/editorias/economia/noticias/numero-de-brasileirosendividados-em-2020-foi-o-maior-em-11-anos. Acesso em: 07 de agosto de 2021.

LOPES, R. S. A. V.. *podcast*s no Apoio à Aprendizagem da Matemática. **Ozarfaxinars,** Matosinhos-Portugal, v. 8, n.1, p. 1-9, mai. 2009. Disponível em: https://www.cfaematosinhos.eu/*podcast*s%20no%20Apoio%20a%20Aprendizagem%20da%20Matematica_08.pdf. Acesso em: 12 jul. 2021.

LOPES, Rute Almendra; MACHADO, Diogo Novais; COUTINHO, Clara Pereira. **Utilização do *podcast* num site de apoio ao estudo da Matemática: uma experiência no ensino secundário**. Universidade do Minho. Centro de Investigação em Educação (CIEd). Jul.2019, p.259-267. Minho Portugal. Disponível em: http://hdl.handle.net/1822/9413. Acesso em 12 jul. 2021.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: E.P.U., 2012.

MORAN, José Manoel**. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas**. IN: Moran, J.M.,Masetto M. T., Behrens, M.A. Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica. Campinas, SP: Papirus, 2000.p.11-66.

RAMON, Rosangela et al. Formação docente online em educação financeira: uma proposta de saberes e práticas. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 3, n. 2, p. 290-315, ago. 2019. ISSN 2594-9179. Disponível em: http://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/22611. Acesso em: 13 ago. 2021. doi: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.2.22611.

SÁ, Ilídio Pereira. **A educação matemática crítica e a matemática financeira na formação de professores**. 2012. 152 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)– Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

SAIDELLES, Tiago; MINUZI, Nathalie Assunção; BARIN, Cláudia Smaniotto; SANTOS, Leila Maria Araújo. A utilização do *podcast* como uma ferramenta inovadora no contexto educacional. **Revista Educacional Interdisciplinar**. v. 7, n. 1. 2018. Disponível em:http://seer.faccat.br/index.php/redin/article/view/1143. Acesso em: 10 jul. 2021.

https://brasilescola.uol.com.br/podcasts/matematica-financeira.htm. Acesso em: 13 dezembro 2021.

CAPÍTULO 21

COMPROVANDO O VOLUME DA ESFERA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/03/2022

Maria Carla Ferreira Pereira Tavares
http://lattes.cnpq.br/7068841451400574

Rudimar Luiz Nós
http://lattes.cnpq.br/4377393528295346

RESUMO: Apresentamos neste trabalho duas estratégias para provar a relação para o cálculo do volume da esfera no Ensino Médio: o princípio de Cavalieri e a lei da alavanca de Arquimedes. Empregamos o software gratuito GeoGebra 3D para comprovar dinamicamente a relação para o volume e propomos atividades, lúdico-manipulativas e computacionais, para a sala de aula baseadas nessas duas estratégias. Concluímos que o aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra 3D é uma ferramenta eficaz para construir figuras bidimensionais e tridimensionais, bem como para comparar áreas e volumes dessas figuras, e que as atividades propostas contemplam o que propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino de matemática.

PALAVRAS-CHAVE: A lei da alavanca de Arquimedes. O princípio de Cavalieri. Ensino de matemática. GeoGebra 3D. BNCC.

JUSTIFYING THE VOLUME OF THE SPHERE IN MATHEMATICS CLASSROOM

ABSTRACT: We present in this work two strategies to prove the formula to calculate the volume of the sphere in High School: Cavalieri's principle and Archimedes' law of the lever. The free software GeoGebra 3D is used to dynamically verify the formula to the volume and activities, ludic-manipulative and computational, are proposed for the classroom based on these two strategies. We concluded that dynamic geometry app GeoGebra 3D is an effective tool to build two-dimensional and three-dimensional figures, as well as to compare areas and volumes of these figures, and that the proposed activities comply whit what the Curricular Common National Base (BNCC) proposes for mathematics teaching.

KEYWORDS: Archimedes' law of the lever. Cavalieri's principle. Mathematics teaching. GeoGebra 3D. BNCC.

1 I INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, as reformas educacionais propostas para o ensino de matemática na Educação Básica evidenciam a importância do ensino de geometria plana e geometria espacial. A BNCC (BRASIL, 2018) de matemática para o Ensino Fundamental enfatiza o desenvolvimento de competências através de cinco unidades temáticas correlacionadas, sendo a geometria uma delas. Para o Ensino Médio, o objetivo é ainda mais amplo, pois busca-se a construção de uma visão integrada da disciplina com a realidade. Além disso, a BNCC de Matemática e suas Tecnologias propõe o uso de ferramentas tecnológicas e programas computacionais.

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (BRASIL, 2018, p. 536).

A geometria está presente em todos os documentos que orientam o planejamento e o desenvolvimento da matemática nos vários níveis educacionais (BRASIL, 2018; SEED, 2008), sendo aplicada tanto de forma direta quanto transversal, de maneira a contribuir para que o estudante desenvolva uma visão espacial. Quanto às habilidades em geometria e medidas, a BNCC estabelece para o Ensino Médio:

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 545).

Além disso, a geometria é base de conhecimento para outras áreas da ciência e tecnologia, como por exemplo, a física e as engenharias, reforçando seu caráter multidisciplinar no processo educacional. Tal importância é evidenciada pela quantidade expressiva de questões de geometria plana e de geometria espacial no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Nos mais de vinte anos de existência desse exame (INEP, 2019), podemos elencar na prova de Matemática e suas Tecnologias muitas questões envolvendo o cálculo de áreas e de volumes (NÓS; FERNANDES, 2019, 2018; TAVARES, 2019).

Nas questões de geometria espacial do ENEM, destacamos várias abordando a esfera (TAVARES, 2019). Essas questões são tanto de cunho aplicado, como o cálculo do volume – Figura 1(a), quanto de cunho conceitual – Figura 1(b). A questão ilustrada na Figura 1(b) aborda um aspecto da demonstração da relação para o cálculo do volume da esfera através do princípio de Cavalieri.

O volume da esfera é comumente abordado nos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio através da simples apresentação da relação . Os estudantes não são estimulados a comprovar/justificar essa relação. Contudo, a BNCC estabelece como competência específica 5 para Matemática e suas Tecnologias:

(a) (b)

Figura 1 – Questões do ENEM envolvendo a esfera: (a) questão 02 de 1998; (b) questão 170 da Prova Amarela de 2018

Fonte: INEP (2019).

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).

Dessa forma, apresentamos neste trabalho estratégias e atividades que o professor de matemática do Ensino Médio pode utilizar para comprovar a relação para o cálculo do volume da esfera (NÓS; TAVARES, 2021), e empregamos nas estratégias o aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra 3D (GEOGEBRA3D, 2021; NÓS; SILVA, 2020, 2019), alinhando assim o planejamento de atividades para a sala de aula ao que estabelece a BNCC.

2 | O VOLUME DA ESFERA

Podemos definir a esfera como sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional que distam uma medida *r* de um ponto O considerado. A Figura 2 ilustra uma esfera ε de centro O e raio *r*, cujo volume é definido pelo Teorema 1.

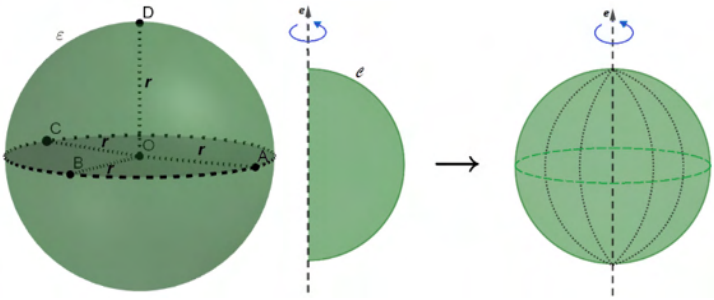


Figura 2 – Esfera de centro O e raio r e sua concepção como sólido de revolução.

Fonte: Tavares (2019, p. 39).

Teorema 1. *O volume V da esfera ε de raio r é dado por*

$$V(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Segundo Lima (2011), dentre as estratégias que o professor de matemática do Ensino Médio pode empregar para justificar a relação determinada pelo Teorema 1 estão o princípio de Cavalieri e a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes.

2.1 O princípio de Cavalieri

O Princípio 1 ou princípio de Cavalieri[1] (LIMA, 2011; LIMA et al., 2006; PATERLINI, 2010), ilustrado na Figura 3, pode ser apresentado aos estudantes do Ensino Médio como um postulado, ressaltando-se a necessidade de se comprovar a equivalência das seções. Para Lima (2011), o uso do princípio de Cavalieri "permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume" (LIMA, 2011, p. 96).

Princípio 1. *Se todo plano paralelo ao plano das bases de dois sólidos, de bases equivalentes e alturas congruentes, determina nos dois sólidos seções equivalentes, então os dois sólidos são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume.*

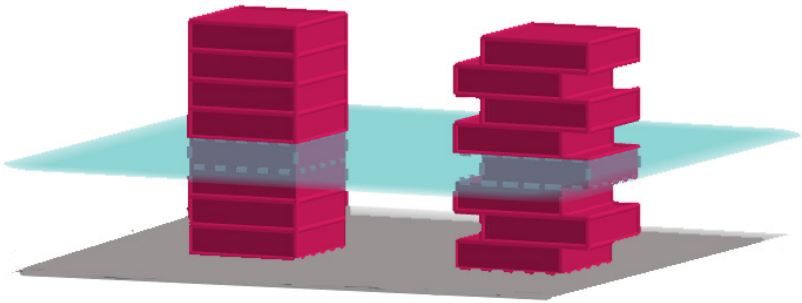


Figura 3 – Sólidos de bases equivalentes e alturas congruentes intersectados por um plano paralelo às bases que determina em ambos seções equivalentes

Fonte: Tavares (2019, p. 40).

Dessa forma, para usar o princípio de Cavalieri no cálculo do volume de um sólido, precisamos comparar este sólido com um sólido de volume conhecido. No caso da esfera, esse sólido é a anticlépsidra - Figura 4: um cilindro equilátero de base congruente ao círculo máximo da esfera, do qual foram retirados dois cones retos de bases congruentes à base do cilindro e de alturas iguais ao raio da esfera. Mostremos então, usando o princípio de Cavalieri, que a esfera e a anticlépsidra, ou a semiesfera e a semianticlépsidra, de mesmo raio têm o mesmo volume.

1 Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647): sacerdote e matemático italiano, discípulo de Galileu. É considerado um dos precursores do cálculo integral.

Figura 4 – Anticlépsidra e um dos cones que formam a clépsidra confeccionados em aço carbono

Fonte: Nós (2019).

Demonstração

Sejam a semianticlépsidra A_S e a semiesfera E_S, ambas de raio r, e β um plano paralelo ao plano α que contém as bases de A_S e E_S. O plano β secciona A_S e A_S a uma distância d, $d<r$, dos centros das bases dos dois sólidos, como ilustra a Figura 5.

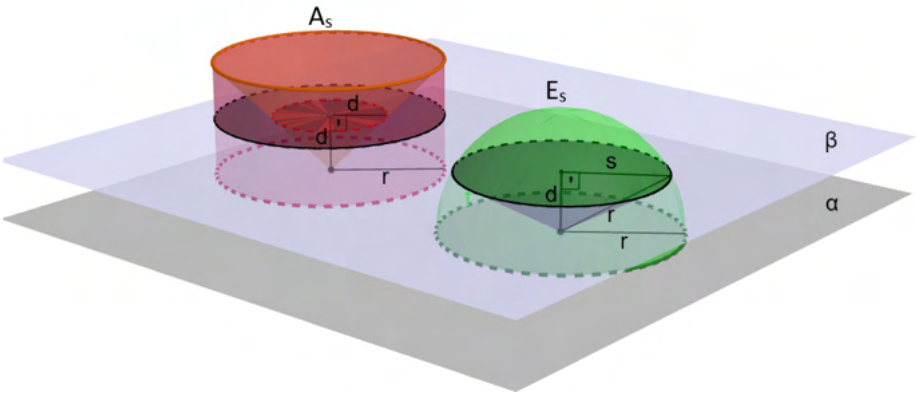


Figura 5 – Semianticlépsidra e semiesfera equivalentes Fonte: Tavares (2019).

Na semiesfera E_s, o plano β determina um círculo de raio s. Como

$$r^2 = d^2 + s^2 \Rightarrow s^2 = r^2 - d^2,$$

a área da seção circular é igual a:

$$A(\text{seção circular}) = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2). \quad (1)$$

Na semianticlépsidra A_s, o plano β determina uma coroa circular de raio externo r

e de raio interno *d*, medida esta comprovada por semelhança de triângulos (caso ângulo-ângulo). Dessa maneira, a área da seção na semianticlépsidra é igual a:

$$A(coroa\ circular) = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2). \tag{2}$$

As áreas (1) e (2) das seções que o plano β determina em E_s e A_s, respectivamente, são iguais independentemente da distância *d*, desde que β seja paralelo à α. Assim, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que E_s e A_s são equivalentes. Portanto:

$$V(E_s) = V(A_s) = V(semicilindro) - V(cone);$$

$$V(E_s) = \pi r^2 r - \frac{1}{3}\pi r^2 r = \frac{2}{3}\pi r^3. \tag{3}$$

Como o volume da esfera ε é igual a duas vezes o volume da semiesfera E_s, multiplicando o resultado (3) por dois temos que

$$V(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

o que confirma a tese do Teorema 1.

2.2 O segundo teorema de Arquimedes

O princípio de Cavalieri, apesar de intuitivo, não pode ser demonstrado de maneira elementar (LIMA, 2011). Assim, o teorema de Arquimedes[2] é outra abordagem que pode ser adotada no Ensino Médio.

Na obra *O Método* (ASSIS; MAGNAGHI, 2014), Arquimedes descreve uma estratégia mecânica para investigar volumes tais como o da esfera – Teorema 2.

Teorema 2. *O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera, enquanto que o volume do cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera.*

Para provar o volume da esfera segundo Arquimedes (AABOE, 2013; ARCHIMEDES; HEATH, 1953; ASSIS; MAGNAGHI, 2014; ÁVILA, 1986; HELLMEISTER, 2013; TAVARES, 2019), precisamos da lei da alavanca ou princípio de equilíbrio proposta por Arquimedes na obra *Sobre o equilíbrio de figuras planas*.

Princípio 2. *Uma alavanca está em equilíbrio se o produto do peso A pela distância a entre o fulcro*[3] *e o ponto de suspensão de A for igual ao produto do peso B e sua distância b do fulcro, isto é,*

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow A.a = B.b. \tag{4}$$

2 Arquimedes de Siracusa (287 AEC – 212 AEC): matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. A ele são atribuídas as leis do empuxo e da alavanca.
3 Ponto fixo.

A Figura 6 mostra uma alavanca em equilíbrio, ou seja, uma alavanca onde a relação (4) é verificada.

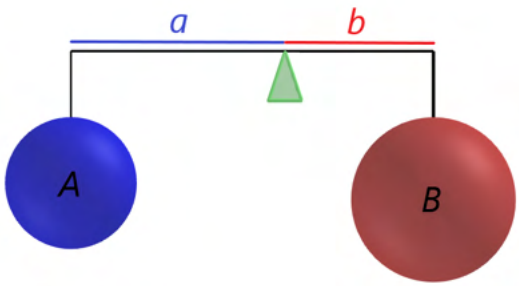
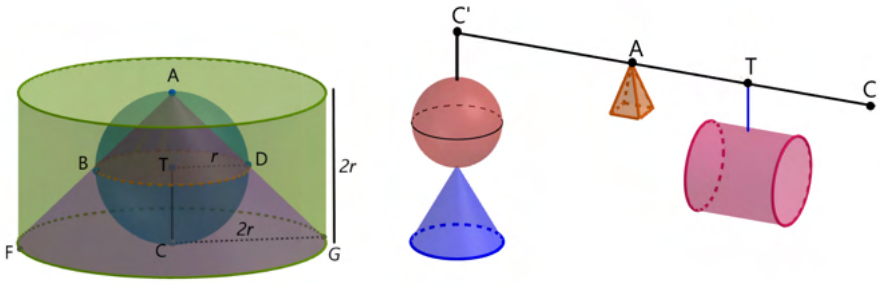


Figura 6 – Alavanca em equilíbrio

Fonte: Tavares (2019).

Utilizando o Princípio 2, podemos mostrar que o cilindro de raio e altura *2r*, a uma distância *d* do fulcro da alavanca, equilibra o cone de raio e altura *2r* e a esfera de raio *r*, ambos a uma distância *2d* do fulcro da alavanca, situação ilustrada na Figura 7.

Desta maneira, usando os sólidos ilustrados na Figura 7(a) na alavanca ilustrada na Figura 7(b), concluímos que:



(a) (b)

Figura 7 – (a) Esfera, cone e cilindro; (b) alavanca de Arquimedes em equilíbrio

Fonte: (a) Tavares (2019, p. 54); (b) Tavares (2019, p. 53).

$$V(cilindro).d = [V(cone) + V(esfera)].2d;$$

$$V(esfera) = \frac{1}{2}V(cilindro) - V(cone) = \frac{1}{2}\pi(2r)^2 2r - \frac{1}{3}\pi(2r)^2 2r = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

o que corrobora a tese do Teorema 1.

3 | ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

3.1 O princípio de equilíbrio de Arquimedes

A maior contribuição de Arquimedes para a geometria está no trabalho *O Método*, no qual explora a determinação de volumes através do Princípio 2 ou lei da alavanca, que define um sistema mecânico de equilíbrio de pesos em uma alavanca (ARCHIMEDES; HEATH, 1953; ASSIS; MAGNAGHI, 2014), ilustrado na Figura 8.

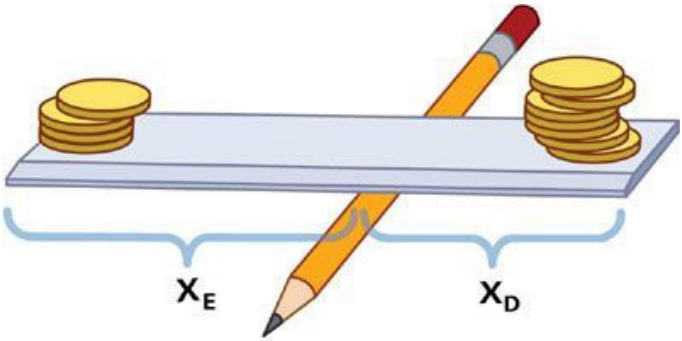


Figura 8 – Equilíbrio segundo a lei da alavanca de Arquimedes

Fonte: Antônio (2015).

Como a matemática grega era essencialmente geométrica, Arquimedes não determinou a relação para o cálculo do volume da esfera. Entretanto, demonstrou a proporcionalidade entre as massas de dois sólidos através da lei da alavanca, o que nos possibilita deduzir a relação. Em sua obra *Sobre a esfera e o cilindro* (ARCHIMEDES; HEATH, 1953), Arquimedes demonstrou o Teorema 2 utilizando um método semelhante ao da exaustão (NÓS; SANO; TAVARES, 2021).

O objetivo desta atividade é estabelecer a relação entre os volumes do cone, da esfera e do cilindro descrita no Teorema 2 empregando a lei da alavanca, também denominada princípio de equilíbrio de Arquimedes.

Etapas da atividade

1. Orientar os estudantes, divididos em grupos, a preencher com areia fina e lacrar três sólidos vazados confeccionados em acrílico, como os ilustrados na Figura 9: uma esfera de raio *r*, um cone reto de raio e altura *r* e um cilindro equilátero de raio *r*.

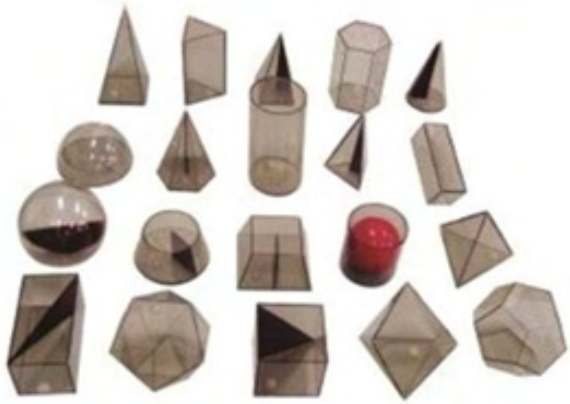


Figura 9 – Sólidos em acrílico

Fonte: Play (2010).

2. Desprezando-se o volume de acrílico nos três sólidos, a razão entre os volumes pode ser representada pela razão entre as massas. Dessa forma, usando uma barra de madeira e um ponto de apoio (fulcro) para construir uma alavanca similar àquela ilustrada na Figura 8, os estudantes devem comparar as massas dos três sólidos, dois a dois, estabelecendo o equilíbrio na alavanca e anotando na Tabela 1 a distância dos sólidos comparados em relação ao ponto de apoio.

Sólidos comparados	**Distância dos sólidos em relação ao ponto de apoio**
Cone e cilindro	
Cone e esfera	
Cilindro e esfera	

Tabela 1 – Atividade 1: distância dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

Fonte: Tavares (2019, p. 109).

3. Com os dados da Tabela 1, os estudantes devem calcular a razão entre as distâncias dos sólidos em relação ao ponto de apoio da alavanca e anotar os resultados na Tabela 2.

Sólidos comparados	**Razão entre as distâncias em relação ao ponto de apoio**
Cone e cilindro	
Cone e esfera	
Cilindro e esfera	

Tabela 2 – Atividade 1: razão entre as distâncias dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

Fonte: Tavares (2019, p. 109).

4. A partir das razões anotadas na Tabela 2, espera-se que os estudantes concluam que:

a) o ponto de apoio da alavanca não é equidistante dos objetos comparados e que o equilíbrio ocorre de forma inversamente proporcional à medida das massas, isto é, o objeto de maior massa está mais próximo do ponto de apoio enquanto o de menor massa está mais distante;

b) as seguintes relações são válidas:

$$V(cilindro) = 6V(cone);$$

$$V(esfera) = 4V(cone);$$

$$V(esfera) = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

$$V(cilindro) = \frac{3}{2}V(esfera); \tag{5}$$

$$\frac{V(cone) + V(esfera)}{V(cilindro)} = \frac{5}{6}. \tag{6}$$

5. Os estudantes podem finalmente comprovar a relação (6) comparando os três sólidos na alavanca. Reescrevendo (6) como

$$6[V(cone) + V(esfera)] = 5V(cilindro),$$

temos que o cone e a esfera, a uma distância de *6 uc* do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro, este a uma distância de *5 uc* do fulcro da alavanca.

Observações

1. Estimular os estudantes a investigar se a massa de acrílico dos sólidos interfere nos resultados da atividade. Pinto (2005) propõe usar uma esfera de raio *r* e um cilindro de raio e altura *r*, ambos de madeira maciça, na alavanca de Arquimedes para calcular o volume da esfera.

2. Esta atividade permite que o professor explore conceitos físicos em sala de aula, promovendo a interdisciplinaridade.

3. Os estudantes podem investigar graficamente na atividade a inscrição e circunscrição de sólidos. Por exemplo, a relação (5) pode ser construída no GeoGebra 3D. A Figura 10 ilustra essa construção.

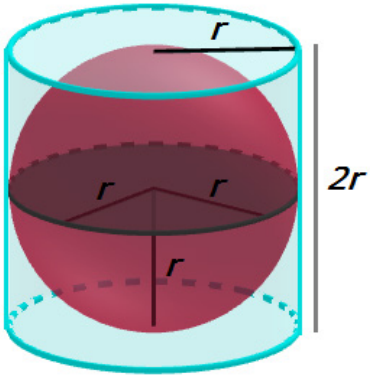


Figura 10 – Esfera inscrita em um cilindro equilátero

Fonte: Tavares (2019, p. 50).

4. Na seção sobre o segundo teorema de Arquimedes, mostramos que, para uma esfera de raio *r*, um cone reto de raio e altura *2r* e um cilindro reto de raio e altura *2r*, a lei da alavanca estabelece que:

$$\frac{V(cone) + V(esfera)}{V(cilindro)} = \frac{1}{2};$$

$$2[V(cone) + V(esfera)] = V(cilindro). \qquad (7)$$

Dessa forma, pela relação (7) temos que o cone e a esfera, a uma distância *d* do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro a uma distância $\frac{d}{2}$ do fulcro da alavanca. As Figuras 11 e 12 ilustram a relação (7) para *r*=2,5*cm* e *d*=30*cm*, na balança de Arquimedes em equilíbrio e desequilíbrio, respectivamente. O cilindro, o cone e a esfera presentes nessas figuras foram confeccionados em impressora 3D.

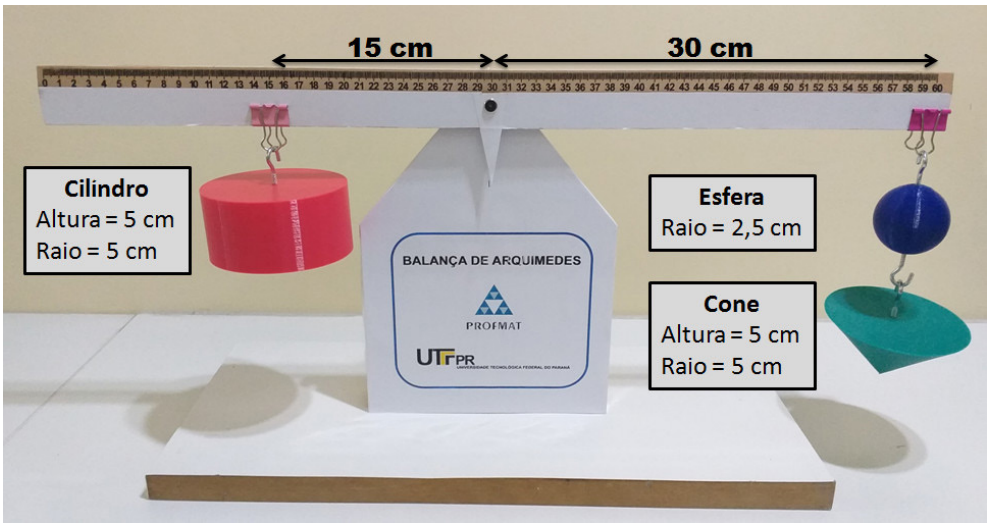


Figura 11 – Lei da alavanca de Arquimedes: a esfera e o cone equilibram o cilindro

Fonte: Tavares (2019, p. 111).

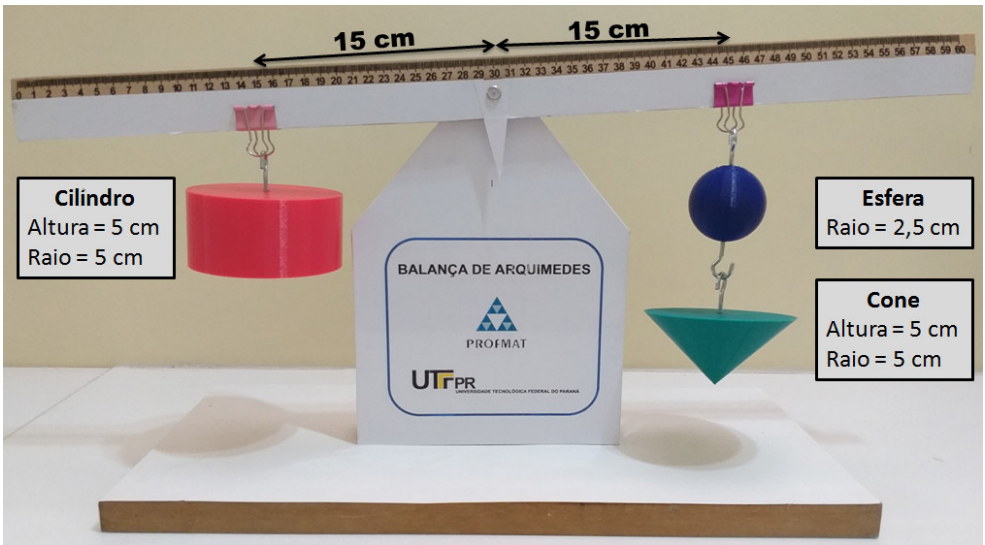


Figura 12 – Lei da alavanca de Arquimedes: a esfera e o cone não equilibram o cilindro

Fonte: Tavares (2019, p. 111).

3.2 O princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D

O objetivo da atividade é construir uma sequência didática no GeoGebra 3D para comprovar o volume da esfera empregando o princípio de Cavalieri.

Etapas da atividade

1. Construir uma semiesfera de raio *3 cm* através da função $z = f(x, y) =$

$\sqrt{9-(x-x_A)^2-(y-y_A)^2}$. Marcar o centro A do círculo máximo da semiesfera (Z_A=0) e o raio $\overline{AB}$ perpendicular ao plano desse círculo. Finalizar traçando duas retas, a primeira passando pelo ponto B e a segunda paralela ao raio $\overline{AB}$ e perpendicular à primeira, como mostra a Figura 13.

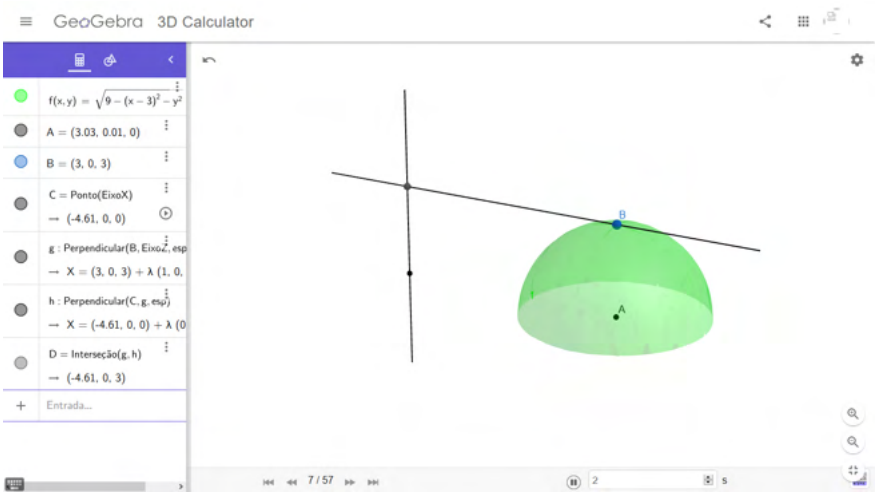


Figura 13 – Construção da semiesfera de raio *AB*=3*cm*

Fonte: Tavares (2019, p. 112).

2. Construir o cilindro circular reto de altura $\overline{AB}$ e raio *3 cm* cujo eixo é a segunda reta traçada na primeira etapa, como ilustra a Figura 14. O eixo do cilindro deve distar mais de *6 cm* da reta suporte de $\overline{AB}$.

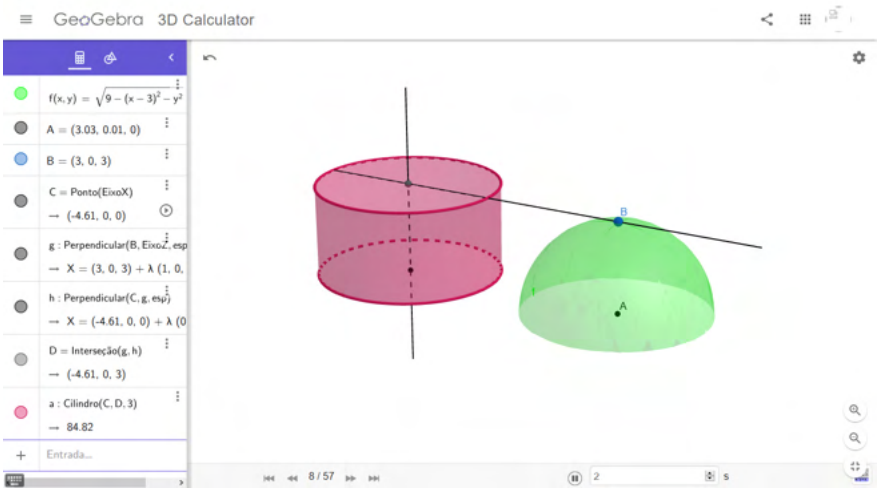


Figura 14 – Construção do cilindro de altura AB=3*cm* e raio *r*=3*cm*

Fonte: Tavares (2019, p. 112).

3. Construir um cone reto de altura $\overline{AB}$ e raio *3 cm*, cujo vértice é o centro da base inferior do cilindro construído na segunda etapa, como na Figura 15. O sólido formado pelo cilindro menos o cone é a semianticlépsidra.

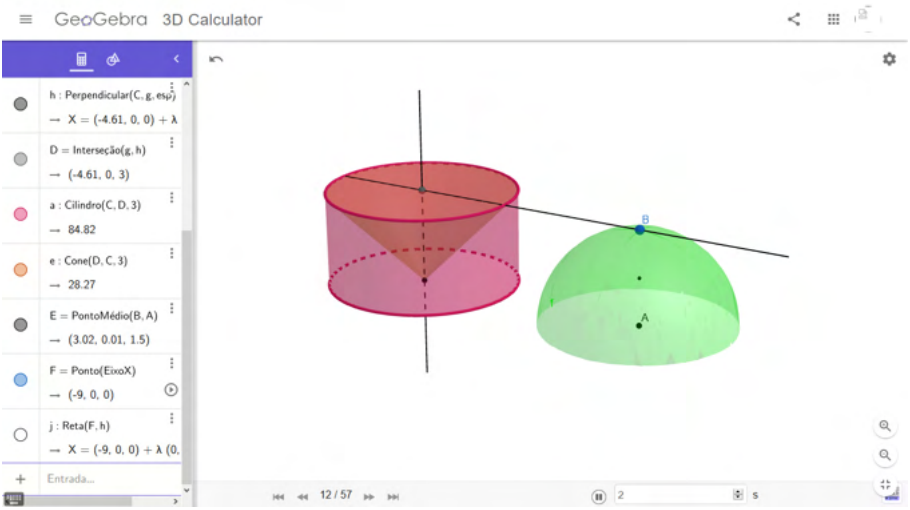


Figura 15 – Construção da semianticlépsidra

Fonte: Tavares (2019, p. 113).

4. Determinar o ponto médio de $\overline{AB}$ e traçar o plano secante à semianticlépsidra e à semiesfera que passa pelo ponto médio e é perpendicular ao eixo do cilindro, como mostra a Figura 16.

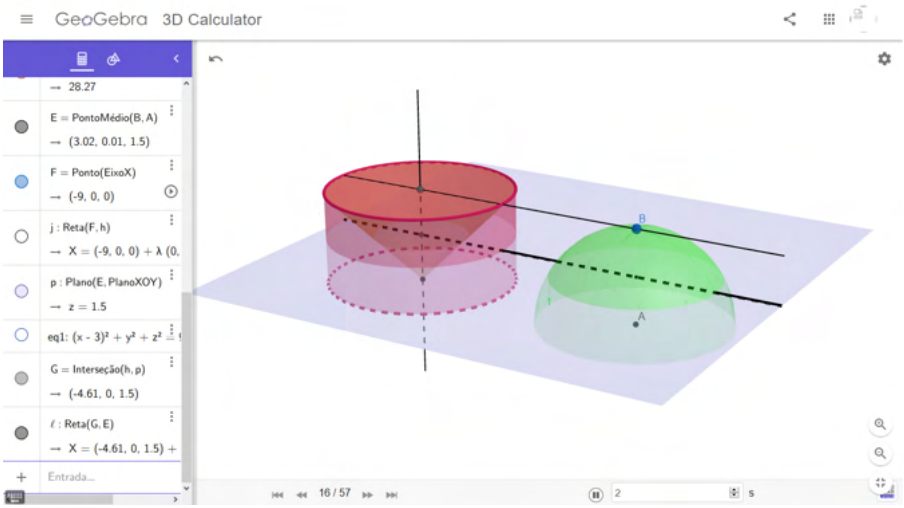


Figura 16 – Construção do plano secante à semianticlépsidra e à semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 113).

5. Destacar a intersecção do plano secante com a semianticlépsidra, uma coroa circular, e com a semiesfera, um círculo, como ilustra a Figura 17.

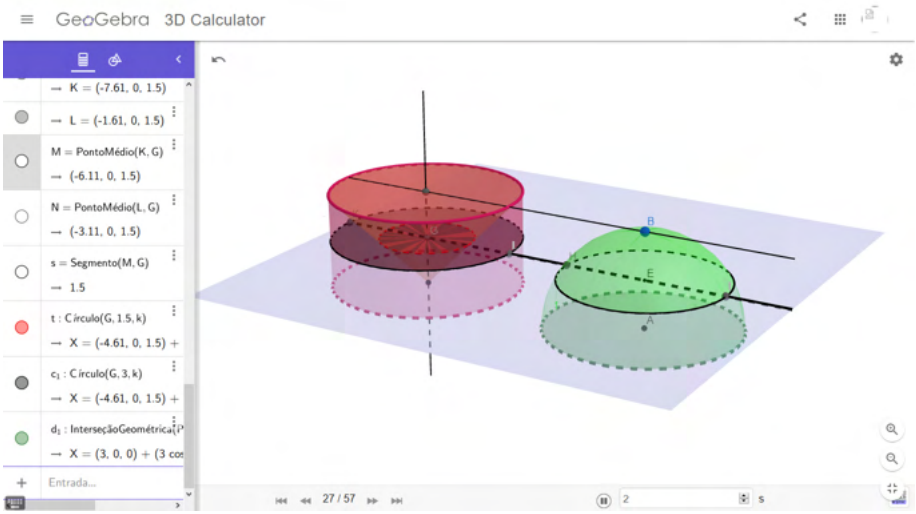


Figura 17 – Seções na semianticlépsidra e na semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 114).

6. Calcular a área das seções na semianticlépsidra e na semiesfera e concluir que as seções são equivalentes, como mostra a Figura 18.

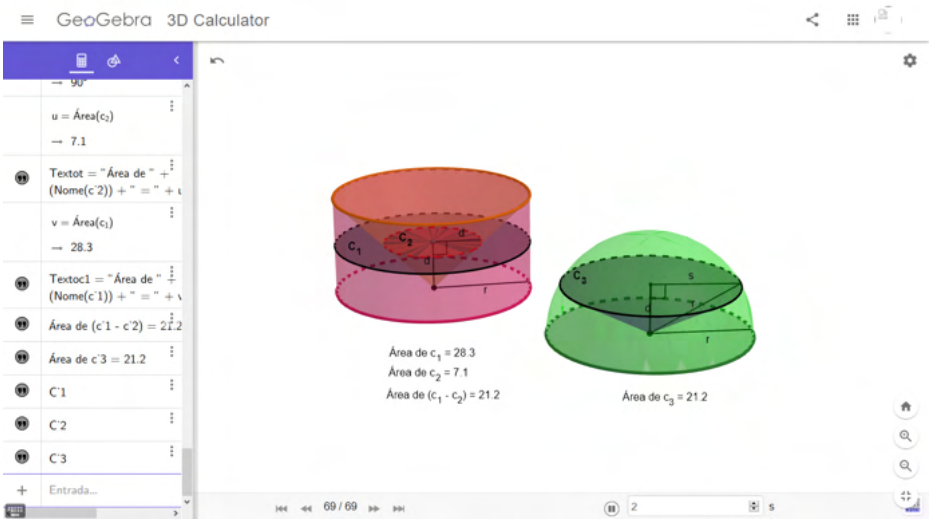


Figura 18 – Área das seções na semianticlépsidra e na semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 114).

7. Calcular o volume da semianticlépsidra e da semiesfera, como na Figura 19.

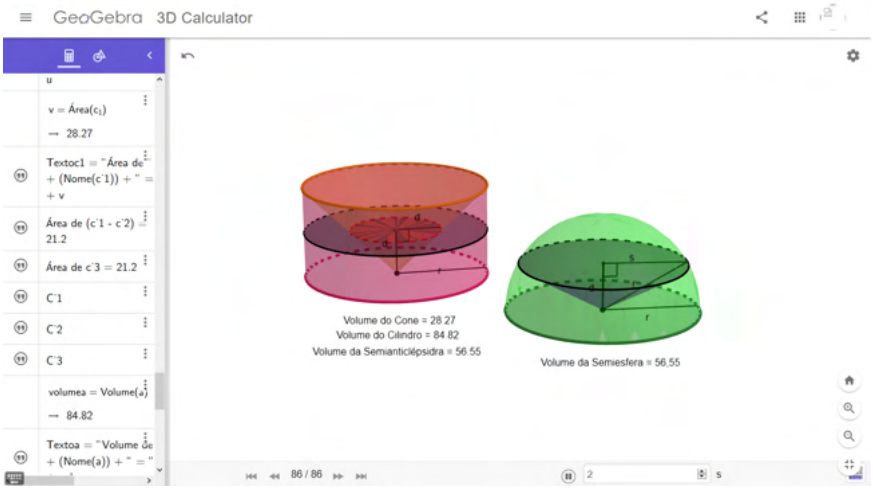


Figura 19 – Volume da semianticlépsidra e da semiesfera

Fonte: Tavares (2019, p. 115).

Observações

1. A animação descrita nesta atividade está disponível em

https://www.geogebra.org/3d/dd4eh7dz.

2. Usando três sólidos vazados de acrílico, um cone reto de raio e altura *r*, um cilindro equilátero de raio *r* e uma esfera de raio *r*, podemos mostrar que a esfera de raio *r* é equivalente à anticlépsidra de raio *r*. Iniciamos enchendo o cilindro equilátero de água. Em seguida, despejamos a água do cilindro no cone até enchê-lo. Descartamos essa água e enchemos o cone novamente. Despejamos agora na esfera a água que restou no cilindro. Os estudantes devem observar que a esfera ficou completamente cheia e que, portanto,

$$V(esfera) = V(anticlépsidra) = V(cilindro) - 2V(cone) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

As estratégias/atividades para comprovar a relação para o cálculo do volume da esfera presentes neste trabalho foram apresentadas em 2019 aos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio do CPM, no qual a autora é professora de matemática. Concluímos que as atividades foram relevantes para consolidar conceitos relativos ao cálculo do volume da esfera, do cone e do cilindro e contribuíram à preparação dos estudantes para o ENEM.

Esperamos que este trabalho motive os professores de matemática da Educação Básica a elaborar atividades e experimentos para comprovar/justificar relações geométricas, ao invés de simplesmente apresentá-las aos estudantes, como também a utilizar aplicativos de geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D, nas aulas de geometria.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANTÔNIO, J. C. **Alavancas e equilíbrio**. Instituto Claro, 2015. Disponível em: https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/alavancas-e-equilibrio/. Acesso em: 03 set. 2021.

ARCHIMEDES; HEATH, T. L. **The works of Archimedes**. New York: Dover, 1953.

ASSIS, A. K. T.; MAGNAGHI, C. P. **O método ilustrado de Arquimedes**: utilizando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade. Montreal: Apeiron, 2014.

ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, n. 10, 1986.

BRASIL – Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 03 set. 2021.

GEOGEBRA3D. **GeoGebra 3D calculator**. 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/3d. Acesso em: 03 set. 2021.

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

INEP. **Provas e gabaritos do ENEM**. 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 03 set. 2021.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. v. 2, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NÓS, R. L. **Acervo de material didático da disciplina geometria espacial**. UTFPR: Curitiba, 2019.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121-137, 2019. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/1805.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 38, 2018, Campinas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2. São Carlos: SBMAC, 2018. p. 010272-1 – 010272-7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2018.006.02.0272.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 39, 2019, Uberlândia. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1. São Carlos: SBMAC, 2020. p. 010364-1 – 010364-7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2020.007.01.0364.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos. **C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 53-70, 2019. DOI: https://doi.org/10.21167/cqdvol16201923169664rlnvmrs5370.

NÓS, R. L.; TAVARES, M. C. F. P. Comprovando o volume da esfera nas aulas de matemática do Ensino Médio. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 40, 2021, evento virtual. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 8, n. 1. São Carlos: SBMAC, 2021. p. 010387-1 – 010387-7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2021.008.01.0387.

NÓS, R. L.; SANO, M.; TAVARES, M. C. F. P. Using Bernoulli numbers to generalize a limit of finite sum arising from volume computations with the squeeze theorem. **Revisem**, 6(3): 77-96, 2021.

PATERLINI, R. R. Os “teoremas” de Cavalieri. **Revista do Professor de Matemática**, n. 72, p. 43-47, 2010.

PINTO, F. de A. Arquimedes, as alavancas e o volume da esfera. **Revista do Professor de Matemática**, n. 58, p. 18-20, 2005.

PLAY, J. **Sólidos geométricos em acrílico**. 2010. Disponível em: https://www.jottplay.com.br/produto/solidos-geometricos-acrilico/530. Acesso em: 03 set. 2021.

SEED. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Curitiba: Governo do Paraná/SEED/DEB, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1. Acesso em: 03 set. 2021.

TAVARES, M. C. F. P. **Superfícies e sólidos esféricos.** 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2019. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4697.

CAPÍTULO 22

SIMULATED ANNEALING E ALGORITMO GENETICO NA DETERMINAÇÃO DE POLÍGONOS MÁGICOS

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 09/01/2022

Josimar da Silva Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Cornélio Procópio – Paraná
http://lattes.cnpq.br/7294716557200867
http://orcid.org/0000-0002-3476-4119

RESUMO: Neste trabalho apresentamos dois métodos heurísticos para a determinação de Polígonos Mágicos $P(n,k)$: um método evolutivo baseado no algoritmo genético sem a utilização do operador de cruzamento e o Simulated Annealing. Resultados experimentais mostram que estes dois algoritmos obtém boas aproximações para a determinação de Polígonos Mágicos, sendo que o algoritmo Simulated Annealing obtém melhores soluções do que método evolutivo baseado no algoritmo genético.
PALAVRAS-CHAVE: Algoritmos Evolutivos; Combinatória; Polígonos Mágicos; Polígonos Mágicos Degenerados; Simulated Annealing.

SIMULATED ANNEALING AND GENETIC ALGORITHM IN THE DETERMINATION OF MAGIC POLYGONS

ABSTRACT: In this work we presente two heuristic methods for the determination of Magic Polygons $P(n,k)$: an evolutionary method based on the genetic algorithm without the use of crossover operator and the Simulated Annealing. Experimental results show that these two algorithms obtain good approximations for the determination of Magic Polygons, and the Simulated Annealing algorithm obtains better solutions than the evolutionary method based on the genetic algorithm.
KEYWORDS: Evolutionary Algorithms; Combinatorics; Magic Polygons; Degenerated Magic Polygons; Simulated Annealing.

1 I INTRODUÇÃO

Quadrados Mágicos tem sido conhecido por um longo tempo em diferentes povos e diferentes culturas que, às vezes, tem atribuído significados místicos [2, 4, 5]. Além de serem utilizados em propósitos recreativos, podemos encontrar aplicações para quadrados mágicos na Física, na Ciência da Computação, no Processamento de Imagens e na Criptografia [6, 7, 8], entre outras. Desta maneira, tem sido desenvolvido vários métodos para construção de quadrados mágicos que satisfazem algumas propriedades particulares e algumas generalizações tem sido criadas, como podemos ver em [9, 10, 11, 12]. Em [13] uma generalização da mesma ideia da representação de quadrados mágicos de ordem 3 utilizando vértices, pontos médios e o centro geométrico de uma quadrado, onde podemos encontrar algumas propriedades e a condição de existência de polígonos mágicos e a construção para polígonos mágicos de ordem 3, para cada n par. Em [15] outras estruturas similares foram propostas, onde são

definidos Polígonos Mágicos P (n, k) e Polígonos Mágicos Degenerados D(n, k) como em [3], que abrange o conceito de polígono mágico [13] já que, neste caso, trata-se do caso P (n, 2).

Em [16] são discutidas condições de existências de polígonos mágicos *P*(*n*,2), *P*(*n*,4) e de polígonos mágicos degenerados *P*(*n*,2), onde encontramos algoritmos exatos para construção de exemplos para *P*(*n*,2) para todo inteiro *n* par maior ou igual a 4 e para *D*(*n*,2) para todo inteiro $n \geq 3$.

Baseados na topologia, podemos também afirmar que se polígonos mágicos *P*(*n*,*k*) existem, então *k é* par. No entanto, a estrutura combinatória particular dos polígonos mágicos *P*(*n*,*k*) faz com que estas estruturas sejam obtidas com gasto computacional bastante elevado para alguns valores de n e k, o que faz com que Polígonos Mágicos *P*(*n*,*k*) possam ser utilizados na Criptografia e em Teoria dos Códigos. Além disso, como não existem construções conhecidas para a obtenção de exemplos de Polígonos Mágicos *P*(*n*,*k*) para $k > 2$, uma vez que este tema foi introduzido recentemente em [14], o gasto computacional para a obtenção de Polígonos Mágicos *P*(*n*,*k*) para $k > 2$ é bastante elevado, o que justifica a introdução do uso de meta-heurísticas como as abordadas neste trabalho para a obtenção de exemplos de Polígonos Mágicos *P*(*n*,*k*).

1.1 Polígonos mágicos

Polígonos Mágicos possuem uma definição geométrica e sua definição equivalente algébrica. Estas definições para Polígonos Mágicos podem ser encontradas em [3]. Para a determinação de polígonos m´mágicos computacionalmente, utilizaremos a definição algébrica.

Algebricamente, um polígono mágico *P*(*n*,*k*) de *n* lados e de ordem *k*+1 é uma permutação do conjunto $\left\{1, 2, \cdots, \frac{k^2n}{2}+1\right\}$, escrita na forma $\left(x_1, x_2, \cdots, x_{\frac{k^2n}{2}+1}\right)$, satisfazendo as seguintes equações lineares:

$$\begin{cases} x_{(t-1)nk+(i-1)k+1} + x_{(t-1)nk+(i-1)k+2} + \cdots + x_{(t-1)nk+ik} + x_{(t-1)nk+ik+1} = u, \\ \sum_{t=1}^{\frac{k}{2}} x_{(t-1)nk+(i-1)k+j} + \sum_{t=1}^{\frac{k}{2}} x_{(t-1)nk+(i-1)k+j+\frac{kn}{2}} + c = u, \\ x_{\frac{k^2n}{2}+1} = c, \end{cases} \tag{1}$$

onde $c = \frac{k^2n+4}{4}$ é o valor correspondente ao vértice raiz, *u* = (*k*+1)*c* é a soma mágica, $t \in \{1, 2, \cdots, \frac{k}{2}\}, i \in \{1,2,\cdots,n\}$ e $j \in \{1,2,\cdots,k\}$.

Na Figura 1, vemos a representação geométrica de um polígono mágico *P*(4,4) dado pela sequencia (7,23,3,28,24,22,16,19,4,10,31,13,27,2,29,20,25,30,1,21,8,18,12,15,32,5,33,6,9,26,11,14,17).

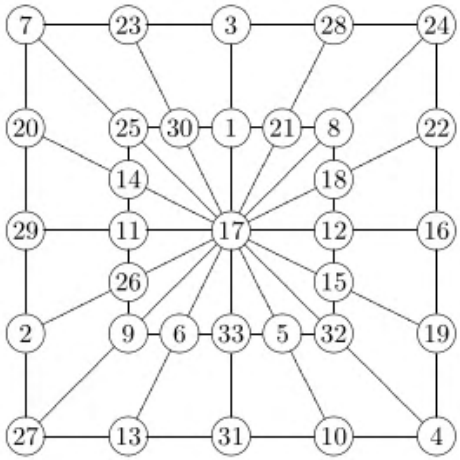


Figura 1: Polígono Mágico P(4, 4)

1.2 Algoritmos genéticos

Algoritmos genéticos são algoritmos para otimização inspirados no processo de seleção natural. Tal qual no processo de seleção natural o algoritmo cria uma população inicial que é um conjunto de indivíduos que são primeiras aproximações para a solução do problema de otimização considerado e esta população sofre transformações a cada iteração ou geração. Assim como no processo de seleção natural, onde indivíduos mais aptos geralmente sobrevivem o algoritmo genético conta com uma função *fitness* que é responsável por mensurar a aptidão dos indivíduos da população e comparar a aptidão entre indivíduos de uma mesma população, estabelecendo também quais indivíduos são mais aptos e quais indivíduos são menos aptos.

Para tanto o algoritmo conta com alguns operadores também inspirados no processo de seleção natural para que os indivíduos da população sofram alterações a cada geração que são os seguintes:

Seleção - O operador de seleção é um operador que altera a população através da replicação dos indivíduos mais aptos que geralmente constituem melhores aproximações para a solução e eliminação dos indivíduos menos aptos. A quantidade de replicações geralmente é um parâmetro de entrada no algoritmo.

Cruzamento - O operador de cruzamento é responsável por tomar dois indivíduos e criar dois novos indivíduos em que cada indivíduo criado pelo processo tenha características dos dois indivíduos originais. Nesta versão proposta os indivíduos originais são eliminados para a introdução destes novos indivíduos mantendo sempre o número de indivíduos da população constante. A quantidade máxima de pares de indivíduos que sofreram ação

deste operador a cada iteração é um parâmetro de entrada do algoritmo genético proposto.

Mutação - O operador de mutação é responsável por proporcionar pequenas perturbações em indivíduos arbitrários da população com taxa de perturbação máxima e quantidade máxima de indivíduos sob a ação deste operador previamente estipulados por parâmetros iniciais do algoritmo.

Para garantir que a sequência de populações obtidas a cada iteração seja uma sequência com indivíduos cada vez mais aptos utilizaremos o chamado **elitismo** que consiste em levar o melhor indivíduo de uma geração para a próxima geração. Naturalmente o elitismo faz com que a cada geração a população melhore no sentido de que o indivíduo mais apto de uma geração não seja mais apto do que o indivíduo mais apto da geração seguinte. O elitismo muitas vezes ajuda na obtenção de boas aproximações para a solução do problema de otimização fazendo com que a sequência das populações obtidas a cada iteração convirja mais rapidamente para a solução do problema, o que permite utilizar um número menor de iterações. Mais informações sobre Algoritmos Genéticos podem ser vistas em [14].

1.3 Simulated Annealing

O Simulated Annealing é uma meta-heurística inspirada no fenômeno da termodinâmica do recozimento. Para isto, o Simulated Annealing propõe explorar o espaço de busca através de uma estratégia de múltiplos reinícios aleatórios cuja transição é controlada através de uma simplificação da distribuição de probabilidade proposta por Maxwell-Boltzmann e com um esquema de resfriamento da temperatura ao longo das iterações. Critério de parada para este algoritmo é o resfriamento chegar na zona limítrofe. O Algoritmo 1 contém a versão proposta do Simulated Annealing.

Algoritmo 1: Algoritmo Simulated Annealing

Entrada: Solução inicial B^* e parâmetros α e MAX

Saída: Solução B

```
1  início
2     B := B*;
3     Começar com a temperatura (inicial) T :=1 ;
4     caso (T > 0.00001) faça
5        i =0
6        para i<MAX faça
7           i := i +1 ;
8           Gerar uma solução C próxima de B;
9           D = f(C) − f(B);
10          Selecionar aleatoriamente x ∈ [0, 1];
11          se (D < 0) ou exp(− D/T ) > x então
12             B := C;
13       fim
14       T = αT;
15    fim
16 fim
```

2 | METODOLOGIA

A criação do algoritmo evolutivo, baseado no algoritmo genético, seguiu os seguintes passos:

I. Criação de um pacote para alocação dinâmica da memória;

II. Criação de um procedimento para criação da população com base nos parâmetros que definem um polígono mágico e no tamanho da população de tal forma a garantir a diversidade dos indivíduos;

III. Criação de uma função para mutação simples de um indivíduo da população que corresponde a uma

transposição;

IV. Criação de um pacote que define a métrica (distância entre indivíduos da população e polígonos mágicos), bem como para determinação de indivíduos mais aptos da população, que são mais próximos de polígonos mágicos.

V. Criação de um pacote que faz a seleção com base na aptidão;

VI. Criação de um programa principal, que recebe 6 parâmetros, *n,k,numero,tamanho,nrateio* e *pmuta* para a obtenção de uma aproximação para um elemento de $P(n,k)$, onde:

- *numero* é o número de iterações;
- *tamanho* é tamanho da população;
- *nrateio* é a quantidade de indivíduos selecionados para a determinação do indivíduo mais apto que será replicado e eliminação dos indivíduos menos aptos;
- *pmuta* é a porcentagem máxima dos indivíduos da população que sofrerá a ação do operador de mutação.

Durante a execução do programa principal cria-se a população com base na quantidade *tamanho* de indivíduos, executa a quantidade de iterações com base no parâmetro *numero,* sendo que em cada iteração ocorre a seleção, a mutação de um dos indivíduos da população (uma transposição), sendo que o indivíduo mais apto de uma geração é levado para a geração seguinte (*elitismo*).

Neste algoritmo não utilizamos o cruzamento e adotamos o elitismo e a seleção (ou rateio) para que, a cada geração, o indivíduo mais apto não seja menos apto do que o indivíduo da geração anterior.

No algoritmo genético utilizamos 3000 iterações com uma população de 30 indivíduos, utilizando rateios de 3 e taxa de mutação em, no máximo, 30% da população, repetindo 100 vezes o experimento para cada tipo de polígono mágico, para que sejam obtidos os dados constantes na tabela 1, conforme os valores de n e k dados.

Para a criação Simulated Annealing implementamos um algoritmo em C através do

pseudocódigo apresentado pelo Algoritmo 1, em que utilizamos um m´máximo de 3000 iterações, com uma temperatura inicial $T = 1$ e utilizando o esquema de resfriamento $T_k = \alpha T_{k-1}$, para uma constante $\alpha = 0.75$, repetindo 100 vezes o experimento para cada tipo de polígono mágico para que sejam obtidos os dados constantes na Tabela 2, conforme os valores de n e k dados.

2.1 Função fitness

Como polígonos mágicos foram definidos a partir de um sistema de equações, podemos escrever cada i-ésima equação que define um polígono mágico na forma $f_i(X) = 0$, onde $X = \left(x_1, \cdots, x_{\frac{k^2n}{2}+1}\right)$. Portanto, o sistema de equações que define um polígono mágico pode ser representado na forma

$$\begin{cases} f_1(X) = 0 \\ f_2(X) = 0 \\ \vdots \\ f_m(X) = 0 \end{cases}$$

e podemos adotar como a métrica que define a distância entre um indivíduo da população X e polígonos mágicos como sendo

$$f(X) = |f_1(X)| + \cdots + |f_m(X)|$$

que é a nossa função *fitness.*

Isto quer dizer que quanto mais perto de zero a função $f(X)$ estiver, mais próximo o indivíduo X da população estará de um elemento de $P(n,k)$, caso $P(n,k)$ exista.

Explicitamente, nosso sistema de equações (1), nos proporciona a função *fitness*

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{t,i} \left| x_{(t-1)nk+(i-1)k+1} + x_{(t-1)nk+(i-1)k+2} + \cdots + x_{(t-1)nk+ik} + x_{(t-1)nk+ik+1} - u \right| \\ &+ \sum_{j,i} \left| \sum_{t=1}^{\frac{k}{2}} x_{(t-1)nk+(i-1)k+j} + \sum_{t=1}^{\frac{k}{2}} x_{(t-1)nk+(i-1)k+j+\frac{kn}{2}} + c - u \right| + \left| x_{\frac{k^2n}{2}+1} - c \right|, \end{aligned}$$

onde $X = \left(x_1, \cdots, x_{\frac{k^2n}{2}+1}\right)$, $c = \frac{k^2n+4}{4}$ é o valor correspondente ao vértice raiz, $u = (k+1)c$ é a soma mágica, $t \in \{1, 2, \cdots, \frac{k}{2}\}$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

3 | RESULTADOS E ANÁLISE

Todos os resultados experimentais apresentados são obtidos utilizando um laptop com processador Intel Core i7 4510U com CPU de 2.00 GHz e 8GB de memória e sistema operacional Linux da Debian utilizando a linguagem de programação C.

Nas tabelas 1 e 2 foram obtidos os seguintes parâmetros:

N_v é o número de pontos ou variáveis do polígono mágico $P(n,k)$;

d_{min} é o menor valor entre a menor distância entre os elementos da população e um elemento de $P(n,k)$ quando repetimos o experimento 100 vezes;

d_{max} é o maior valor entre a menor distância entre os elementos da população e um elemento de $P(n,k)$ quando repetimos o experimento 100 vezes;

d_m é a média entre as menores distâncias entre os elementos da população e elementos de $P(n,k)$ quando repetimos o experimento 100 vezes;

σ_d representa o desvio padrão entre as menores distâncias entre elementos da população e elementos de $P(n,k)$ quando repetimos o experimento 100 vezes;

t_m representa o tempo médio de execução na das melhores aproximações para elementos de $P(n,k)$ obtidas em cada um dos 100 experimentos;

σ_t representa o desvio padrão dos tempos de execução ao serem obtidos melhores aproximações para os elementos de $P(n,k)$ ao se repetirem cada experimento 100 vezes.

N	k	N_V	d_m	σ_d	t_m (ms)	σ_t	d_{min}	d_{max}
4	2	9	0.020000	0.198997	46.291260	1.530060	0	2
6	2	13	1.460000	1.519342	60.252970	1.998928	0	4
8	2	17	4.560000	3.347596	74.002650	1.642446	0	16
10	2	21	7.600000	4.400000	88.169280	1.703495	0	22
3	4	25	4.640000	2.609674	80.417860	1.381063	1	13
4	4	33	5.540000	2.342733	111.236500	1.946969	2	13
5	4	41	18.870000	8.024531	128.898260	1.336463	6	39
6	4	49	10.340000	3.878711	158.917440	2.042591	0	21
7	4	57	38.510000	14.821265	173.861930	1.416975	8	89
8	4	65	16.220000	6.501661	206.950980	2.103320	6	46
10	4	81	24.650000	7.340811	256.639170	2.381667	13	55

Tabela 1: Dados obtidos utilizando o Algoritmo Genético

n	k	N_V	d_m	σ_d	t_m (ms)	σ_t	d_{min}	d_{max}
4	2	9	0.000000	0.000000	45.149110	1.710974	0	0
6	2	13	0.260000	0.672607	58.207520	1.477539	0	2
8	2	17	1.980000	1.483105	69.831530	1.676535	0	12
10	2	21	3.320000	2.386965	82.420290	1.717989	0	14
3	4	25	2.590000	1.184019	72.384540	1.451555	0	6
4	4	33	2.990000	1.360110	99.718720	1.821401	0	7
5	4	41	5.560000	2.303562	110.150380	1.332585	2	13
6	4	49	4.820000	1.614806	136.983970	1.724974	2	10
7	4	57	11.720000	4.880738	146.025890	1.716717	4	28
8	4	65	6.730000	2.348851	176.100500	1.776823	2	13
10	4	81	9.320000	2.344696	215.570540	1.870072	4	16

Tabela 2: Dados obtidos pelo Algoritmo Simulated Annealing

Observando a Tabela 1 podemos notar que o algoritmo genético obtém uma solução exata para o polígono mágico para os casos $P(4,2)$, $P(6,2)$, $P(8,2)$, $P(10,2)$ e $P(6,4)$ e obtém aproximações para os demais casos em que os polígonos mágicos existem.

Na tabela 2, podemos notar que o Simulated Annealing obtém solução exata para o polígono mágico para os casos $P(4,2)$, $P(6,2)$, $P(8,2)$, $P(10,2)$, $P(3,4)$ e $P(4,4)$ e obtém aproximações para os demais casos em que os polígonos mágicos existem.

Podemos notar que os valores de d_m e do desvio padrão σ_d obtidos no Simulated Annealing são menores do que os valores obtidos para o algoritmo genético, o que evidencia que este algoritmo é mais eficiente na determinação de soluções para os parâmetros adotados.

4 | CONCLUSÕES

Nas tabelas 1 e 2 observamos que a imprecisão na determinação do polígono mágico bem como o tempo de execução cresce à medida em que o número de variáveis cresce, utilizando o algoritmo evolutivo baseado no algoritmo genético e utilizando o Simulated Annealing, o que evidencia que os algoritmos estão funcionando corretamente.

As Tabelas 1 e 2 nos mostram que o algoritmo Simulated Annealing obtém melhores soluções do que o algoritmo genético para os parâmetros adotados.

Os algoritmos obtidos determinam polígonos mágicos $P(n,k)$ para quaisquer par de números inteiros (n,k) satisfazendo as condições de existência para polígonos m´mágicos $P(n,k)$. Os dois algoritmos propostos encontram soluções exatas para polígonos mágicos para n e k pequenos e obtém aproximações razoáveis para todos os valores de n e k, o que mostra a funcionalidade dos algoritmos. No entanto, o algoritmo genético ainda precisa ser aperfeiçoado para gerar soluções exatas para quaisquer valores de n e k. Uma forma de fazer isto talvez seja com a implementação de uma função de cruzamento que contemple esta classe de problemas melhorando o tempo de execução e/ou a quantidade de iterações necessárias para a obtenção da solução exata.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos aos revisores pelos comentários que ajudaram no aperfeiçoamento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] Andreescu T, Andrica D, Cucurezeanu I. **Some classical diophantine equations**. First Online, Birkhauser Boston; 2010.

[2] Andress WR. **Basic properties of pandiagonal magic squares**. Amer. Math. Monthly. 1960;67:143-152.

[3] Augusto DD, Rocha, JS. **Magic Polygons and Degenerated Magic Polygons: Characterization and Properties**. Asian Research Journal of Mathematics, 2019; 14(4), 1-18. https://doi.org/10.9734/arjom/2019/v14i430134

[4] Cammann S. **The evolution of magic squares in China**. J. Am. Oriental Soc. 1960;80:116-124.

[5] Rosser B, Walker RJ. **The algebraic theory of diabolic magic squares**. Duke Math. J. 1939;5:705-728.

[6] Chu KL, Drury SW, Styan GPH, Trenkler G**. Magic moore–penrose inverses and philatelic magic square with special emphasis on the Daniels–Zlobec magic square**. Croatian Oper. 2011; 2:4-13.

[7] Ganapathy G, Mani K. **Add-on security model for public-key cryptosystem based on magic square implementation**. in: Proc.

[8] Loly PD. Franklin squares: **A chapter in the scientific studies of magical squares,** Complex Systems. 2007;17:143-161. World Congress on Engineering and Computer Science 1 WCECS; 2009.

[9] Chan CYJ, Mainkar MG, Narayan SK, Webster TD. **A construction of regular magic squares of odd order**. Linear Algebra and its Applications. 2014;457:293-302

[10] Kim Y, Yoo J. **An algorithm for constructing magic squares**. Discrete Applied Mathematics. 2008;156:2804-2809.

[11] Mattingly RB. **Even order regular magic squares are singular**. Amer. Math. Monthly. 2000;107:777-782.

[12] Nordgren RP. **New constructions for special magic squares.** Int. J. Pure Appl. Math. 2012;78.

[13] Jakicic V, Bouchat R. **Magic polygons and their properties**; 2018. Available:arXiv:1801.02262v1

[14] Linden, R. **Algoritmos Genéticos.** Rio de Janeiro: Brasport, 2006.

[15] Pickover CA. **The zen of magic squares, circles, and stars**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

[16] Rocha J. S; Augusto D. D. **Magic Polygons and Degenerated Magic Polygons: Characterization and Properties.** Theory and Applications os Mathematical Science, Vol. 1. London: Book Publisher International, 2020. p.1-21.

CAPÍTULO 23

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ALTERNATIVA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Data de aceite: 01/03/2022

Daniela dos Santos Vargas
Professora efetiva da SEDUC/MT. Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Cândido Mendes. Graduada em Matemática (Licenciatura Plena) pela Universidade Federal de Santa Maria

Victor Hugo de Oliveira Henrique
Graduado em Física (FATEC-SP), Mestre em Educação (UNESP) e Doutorando em Educação (UFMT)

RESUMO: A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino de Matemática muito importante, pois possibilita uma motivação de saberes no sentido de buscar a solução. Nessa busca, o aluno aprende a elaborar estratégias, raciocinar logicamente e verificar se sua estratégia foi válida, o que colabora para o seu desenvolvimento intelectual. A Educação tem lutado por mudanças curriculares, porém os professores tem muita dificuldade em mudar suas práticas docentes e com isto a matemática ainda é marcada pelo seu ensino através da formalização de conceitos e formas mecânicas. Este artigo visa mostrar a importância da resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática. O caminho escolhido para o desenvolvimento deste trabalho foi uma pesquisa bibliográfica, tendo como objetivo coletar informações que os diferentes pesquisadores do tema apresentam sobre esta temática. Os resultados mostram que não se pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas e que a aprendizagem só será significativa se alunos e professores se empenharem na construção dos seus conhecimentos, despertando o gosto pelo raciocínio independente.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de problemas; estratégias didáticas; ensino da matemática.

TROUBLESHOOTING AS AN ALTERNATIVE IN THE TEACHING LEARNING PROCESS

ABSTRACT: Problem Solving is a very important methodology for teaching Mathematics, as it allows for a motivation of knowledge in order to seek a solution. In this search, the student learns to develop strategies, reason logically and verify if their strategy was valid, which contributes to their intellectual development. Education has struggled for curriculum changes, but teachers have great difficulty in changing their teaching practices and with this mathematics is still marked by its teaching through the formalization of concepts and mechanical forms. This article aims to show the importance of problem solving as a didactic strategy for teaching mathematics. The path chosen for the development of this work was a bibliographical research, aiming to collect information that different researchers on the subject have on this subject. The results show that the teaching of problem solving cannot be programmed or mechanized and that learning will only be meaningful if students and teachers are committed to building their knowledge, awakening a taste for independent reasoning.

KEYWORDS: Problem solving; teaching

strategies; teaching mathematics.

INTRODUÇÃO

Na história do Ensino da Matemática surgiram inúmeras metodologias, algumas foram desenvolvidas e outras ainda estão em curso, apresentam características tanto positivas quanto negativas. Julgando ser necessário o uso de uma estratégia que leve os alunos a compreender e entender os conceitos matemáticos presentes no seu cotidiano torna-se indispensável o uso de metodologias que contribuam para essa finalidade, "ensinar matemática utilizando-se de suas aplicações torna a aprendizagem mais interessante e realista e, por isso mesmo, mais significativa" (LORENZATO, 2010, p. 53).

A escola tem o propósito de preparar o estudante para um aprendizado permanente e aperfeiçoar para a vida. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) ressaltam a importância da Matemática desempenhar, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, estruturação do pensamento, agilização do raciocínio dedutivo do aluno, em sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

> A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI E BOTIN, 2004)

No entanto, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva da resolução de problemas ainda é bastante desconhecida e, quando incorporada à prática escolar, aparece como um item isolado, muitas vezes utilizado de forma improdutiva, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagem de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos, deixando de incentivar o raciocínio. Nas escolas encontramos alunos desinteressados e desmotivados em relação ao aprendizado da Matemática, apresentando dificuldades em conceitos básicos, falta de hábitos de leitura e investigação sem mencionar os inadequados métodos de ensino. Uma educação sem a resolução de problemas não possibilita o desenvolvimento de atitudes e capacidades intelectuais, pontos fundamentais para despertar a curiosidade dos alunos e torná-los capazes de lidar com novas situações.

O desenvolvimento deste trabalho teve como objetivo mostrar a importância da resolução de problemas para o ensino da matemática. Os estudos e pesquisas em educação matemática apontam que é necessário enfatizar mais a compreensão, o envolvimento do aluno e a aprendizagem por descoberta. Ambos, compreensão e descoberta, exigem

mais pensamento. E mais pensamento implica maior uso de atividades de resolução de problemas.

Esta pesquisa é de cunho bibliográfico a respeito da resolução de problemas matemáticos como estratégia didática e sua importância para o ensino da disciplina.

As informações foram extraídas de livros, periódicos e documentos oficiais que tratam do ensino e da avaliação em matemática.

DESENVOLVIMENTO

O ensino de Matemática deve priorizar metodologias que possibilitem a criação de estratégias, a comprovação, justificativa, argumentação e espírito crítico, de modo que o aluno perceba que durante a aprendizagem da Matemática tem beneficiado o desenvolvimento do seu raciocínio, capacidade expressiva, sensibilidade estética e imaginação. Desde 1980, os educadores têm estudado a formulação e a resolução de problemas devido à sua grande importância para a aprendizagem e ensino da matemática. Alguns especialistas chegam a considerar a formulação e a resolução de problemas como a principal razão de se aprender e ensinar matemática, pois é por meio dela que se principia o aluno no modo de pensar matemático e nas aplicações dessa disciplina. Um problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. Tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos, adquiridos anteriormente pelos alunos. É muito comum que os alunos saibam efetuar todos os algoritmos, conheçam muitas fórmulas, mas não consigam resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos ou fórmulas, “problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. (LESTER,1982 apud DANTE, 2009)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) definem um problema matemático como

> Uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1998, p. 12)

Podemos encontrar várias definições para resolução de problemas, privilegiaremos algumas que favoreçam a análise que ora se pretende desenvolver.

Um dos autores clássicos com relação à resolução de problemas é Polya, que propõe a seguinte definição:

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim

> nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados. Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o animal que resolve problemas" (POLYA, 1997,p. 1).

Quando usamos a metodologia de resolução de problemas como estratégia didática de ensino de Matemática, seguimos alguns princípios:

- Situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e, a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências;
- O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas;
- A resolução de problemas é uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema ou a transforma-lo em fonte de novos desafios evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida ele constrói conhecimento, procurando realizar a finalidade do ensino de Matemática em resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos.

A resolução de problemas tem grande poder motivador para o aluno, pois envolvem situações novas e diferentes atitudes e conhecimentos. Ao utilizarmos a formulação e resolução de problemas como estratégia de ensino de matemática estamos criando condições para que o aluno aprofunde seu pensamento e libere sua criatividade. Porém isso por si só não garante o desenvolvimento da criatividade, mas aumenta a probabilidade de sua manifestação. Vários pesquisadores concordam com tal posicionamento, Renzulli (1982) propõe que se trabalhem problemas reais para se obter o envolvimento do aluno e a liberação do seu potencial criativo, Juntune (1979), Renzulli (1975) usaram modelos de processos de resolução criativa de problemas como guias para desenvolver um currículo

que favorecesse o lado criativo. Noller (1982 apud CEDRO, MORAES e ROSA, 2010, p. 430) sugere que “os orientadores de alunos criativos e talentosos usem processos criativos de resolução de problemas reais para levar a cabo seus objetivos”. Para que o processo na resolução de problemas seja bem sucedido, é necessário um certo número de habilidades como afirmam Torrance e Torrance (1974, s.p). Estas habilidades seriam:

> [...] dar-se conta da existência dos problemas e lacunas na informação, definir estes problemas e estas lacunas, coletar e combinar informações de experiências anteriores e conhecimentos acumulados, produzir várias soluções possíveis e desenvolver critérios para avaliar estas soluções, usar estes mesmos critérios para julgar estas soluções, testar as soluções mais promissoras, decidir qual é a melhor solução, elaborar os planos e detalhes para a implantação da solução escolhida etc.

Percebemos uma grande semelhança neste processo de ver o pensamento criativo com as etapas consideradas importantes para a resolução de problemas apresentadas por Polya (1997). Segundo o esquema de Polya, são quatro as principais etapas para a resolução de um problema:

- Compreender o problema (o que é dado, o que se procura etc);
- Elaborar um plano (usar conhecimentos anteriores, fazer analogias etc);
- Executar o plano (verificar cada passo, avaliando se está correto ou não etc);
- Fazer o retrospecto ou verificação (para verificar se aquela é uma solução ou se há outras, para tentar generalizações etc).

Sabemos que não existe uma maneira de ensinar o aluno “como deve pensar”, porém é bastante razoável que ao trabalhar com a formulação e resolução de problemas estamos oferecendo “oportunidade para pensar” e discutir as várias maneiras empregadas nesse processo, fazendo emergir e desenvolvendo características criativas nos alunos. Os estudantes são encorajados a pensar por si mesmos, a levantar as próprias hipóteses e testá-las, a criar as próprias estratégias, a discutir com seus colegas como e por que aquela maneira de fazer funciona. Enfim, aqui o papel do professor é manter os educandos pensando e gerando ideias produtivas.

CONCLUSÃO

Sendo assim, quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda-se os alunos a desenvolver sua capacidade de aprender a apreender, habituando-os a determinar por si próprios respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro-texto. No que se refere ao se ensinar resolver problemas, Pozo (1998, p. 14 acrescentam que não é suficiente “dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes” mas faz-se necessário “Criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como

um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta".

Ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais complexa do que ensinar algoritmos e equações. A postura do professor ao lecionar um algoritmo é, em geral, a de um orientador que dá instruções, passo a passo, de como fazer. Na resolução de problemas, ao contrário, o professor deve funcionar como incentivador e moderador das ideias geradas pelos próprios alunos.

Diante dessas considerações, vale ressaltar a importância do aluno compreender a matemática por meio do seu próprio raciocínio na resolução de problemas, e para isso, o professor precisa ter clareza da importância de mediar o processo de ensino e aprendizagem, procurando fazer questionamentos aos alunos de forma especulativa para dar oportunidade de manifestarem suas ideias e assim, fazer com que evoluam em todas as suas fases do pensamento até a formação do conceito, que só é possível, "mediante uma operação intelectual (dirigida pelo uso das palavras) em que todas as funções mentais elementares participam de uma combinação específica." (VYGOTSKY, 1999, p. 101). Desse modo, o professor

> [...] deve ter como objetivo a compreensão das relações intrínsecas entre as tarefas externas e a dinâmica do desenvolvimento, e deve considerar a formação de conceitos como uma função do crescimento social e cultural global do adolescente, que afeta não apenas o conteúdo, mas também o método de seu raciocínio (VYGOTSKY, 1999, p. 73).

REFERÊNCIAS

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CEDRO, W. L.; MORAES, S. P. G.; ROSA, J. E. A atividade de ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico em matemática. **Ciência & Educação**, v. 16, n. 2, p. 427-445, 2010.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

JUNTUNE, J. **Project REACH:** A teacher training program for developing creative thinking skills in students. Gifted Child Quarterly, 1979.

LORENZATO, S**. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 2. ed. ver. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004, p. 1–5.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In.: KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

POZO, J. I. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RENZULLI, J. S. What makes a problem real: Stalking the illusive meaning of qualitative differences in gifted education. **Gifted Child Quarterly**, 26(3), 147-156. 1982.

RENZULLI, J. S. **A guidebook for evaluating programs for the gifted and talented.** Ventura, CA: N/S-LTI-G/T. 1975.

TORRANCE, E. P. **Torrance Tests of Creative Thinking. Norms**-Technical Manual Benseville, IL: Scholastic Testing Service. 1974

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

CAPÍTULO 24

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Data de aceite: 01/03/2022

Débora Gaspar Soares
Mestranda da Pós-Graduação em Geografia da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Membro do grupo de pesquisa: Para uma crítica da Economia Política do Espaço, do(a) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/1106186788602404

Márcio Rufino Silva
Doutor em Geografia Humana pela USP. Professor Adjunto na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/6001195417301978

RESUMO: O cenário da universidade em âmbito nacional tem experimentado alterações no seu espaço educacional derivadas de diferentes fatores, entre os quais compete destacar a implantação de Novas Tecnologias de Informação e Comunicação na prática docente. Esse estudo, busca a análise dessas mudanças que são fomentadas pelo Sistema Nacional de Inovação que orienta a CAPES, a FAPERJ, e o CNPq, na perspectiva da Teoria de Agnes Heller, na introdução sistemática de recursos inovativos nas atividades docentes em concordância com as exigências neoliberais e as mudanças que essas impõem ao exercício do professor, especialmente na construção do cotidiano em territórios virtuais, e na sua jornada de trabalho, dissuadindo os objetivos, a organização e a finalidade da educação.
PALAVRAS-CHAVE: Territórios virtuais, cotidiano, formação para o trabalho, Educação a Distância.

ABSTRACT: The university's scenario at the national level has experienced changes in its educational space derived from different factors, among which it is worth highlighting the implementation of New Information and Communication Technologies in teaching practice. This study seeks the analysis of these changes that are fostered by the National Innovation System that guides CAPES, FAPERJ, and CNPq, from the perspective of Agnes Heller's Theory, in the systematic introduction of innovative resources in teaching activities in accordance with neoliberal demands and the changes that these impose on the exercise of the teacher, especially in the construction of daily life in virtual territories, and in their working hours, deterring the objectives, organization and purpose of education.
KEYWORDS: Virtual territories, daily life, training for work, distance education.

1 I INTRODUÇÃO

A formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT), em nossa investigação, pretende abarcar as tramas, as tranças, e as teias da conexão entre sociedade e educação em EaD e o seu ritmo. Dialogar entre o global e o *sui generis*, entre a escola-instituição formadora das relações sociais de produção capitalista e as profusas experiências possíveis da prática docente, que

dão a conhecer profundas alteridades sócio espaciais, das quais se assemelham a uma travessia indefinidamente em alomorfia. Da mesma maneira essas alteridades quando se tenta fazer o elo, o *link*, essas revelam silhuetas, sombras, contornos, formas descontínuas, perfis variados, diversas escalas que em rede (o lugar, o regional, o nacional, o global) ´tangenciam o aspecto geográfico da sua formação. O que torna a leitura de Agnes Heller fundamental para um estudo rigoroso sobre as contemporâneas transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT) é sua teoria *marxista crítica,* sua biografia permite investigar o espaço social escolar como instituição, mas percebendo a presença, a ação, a atividade das pessoas, do sujeito indivíduo, do sujeito social, que na formação EaD se conecta, e tece redes sociais no seu cotidiano.

Para realização e análise das transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT), as alteridades sócio espaciais, com o ambiente laboral, e com a compreensão de mais valia há uma variedade de teóricos que alteia esse debatimento (Marx, 1983 [1867]; Silva, 2008; Damiani, 2016; Heller, 2016 [1970]; Lukács, 2003; Lefebvre, 1991; entre outros), dentre outras bibliografias pertinentes para o desenvolvimento desse trabalho. Além da bibliografia desses teóricos foi imprescindível o curso nas disciplinas: Epistemologia da Geografia, ministrada pelo Professor Guilherme Ribeiro; e A (Re)produção do Espaço e Cotidiano: Escalas do Urbano e sua Mobilização Crítica, ministrada pelo Professor Márcio Rufino. Essas disciplinas fazem parte do curso de Pós-Graduação em Geografia, e oportunizam o debate e entendimento da dinâmica do processo histórico no exercício das transformações e reproduções no espaço cotidiano. Foram realizadas com encontros presenciais, no prédio da Geociências, Departamento de Geografia em Seropédica no segundo semestre de 2018.

1.1 Entre links e comunicação, conforme Agnes Heller admite o contato em territórios virtuais

As discussões e argumentações relativas à renovação e formação das competências e habilitações do corpo social contemporâneo, circunscrevem os processos históricos e a premência social dos fatos, mas precisam criticar as conjunturas de produção capitalista, o acesso distinto a escola, e o arcabouço institucional que subjuga os seus participantes. Por isso, compreender a correlação entre saber e o poder presume assentir que uma implementação de política educacional, que requer a estruturação da inovação na sociedade presente é razão e circunstância para a reprodução material dessa forma de trabalho na sociedade. Em outros termos, o meio de produção capitalista depreende uma conformação de organização do saber que não é apenas retrato da vida escolar, essa não reflete nitidamente sobre os distintos protagonistas da vida na escola. Segundo Heller (2016 [1970], p.15): “podemos estabelecer a possibilidade de um subsequente desenvolvimento dos valores, apoiar tal possibilidade e, desse modo, emprestar um sentido à nossa história.”

Em conformidade Lefebvre (1991, p.8) diz: “o tempo é o tempo da mudança. Não aquele de uma simples modificação local, parcial, mas o tempo das transições e dos transitórios, o dos conflitos; da dialética e do trágico.” Já Luckacs (2003, p. 205) afirma que: “o tempo é tudo, o homem não é mais nada; quando muito, é a personificação do tempo.” Esses autores tornam claro que a análise do ordinário da vida, do cotidiano, fundamenta as questões, as indagações sobre as mudanças e transformações atuais na educação com o uso da inovação, determinadas pela elucubração econômica e pela influência cultural.

Os estudos acerca do Ensino a Distância no Brasil demandam uma exploração sobre o seu território, para conhecer a rede que se compõe apoiada na sua oferta. Nesse ínterim, a caracterização de rede está relacionada à circulação e alastramento da informação e conhecimento. Entretanto, os territórios virtuais na educação determinam a validação dos conhecimentos, e o contato virtual demarca quais pessoas podem ou não articular as práticas pedagógicas a eles relacionadas. Ocorre uma inibição da prática pedagógica, a manifestação do diálogo aberto é restringida. Contudo, qual é a ameaça da prática pedagógica para o professor? O maior risco da prática pedagógica é a reflexão, o que isso quer dizer? A reflexão acontece no diálogo, no confronto, e a prática pedagógica é também responsável pelas representações do sujeito como indivíduo, pois ela traz memórias, técnicas, recursos, maneiras de experienciar, formas de viver, ritmando as alteridades sociais que a alicerçam. Conforme Heller (2016 [1970], p.17) destaca: “a· vida cotidiana é a vida do homem inteiro; ou seja, o homem participa na vida cotidiana com todos os aspectos de sua individualidade, de sua personalidade.” A autora esclarece que a ameaça da prática pedagógica se desvalia na regulamentação das ações, no controle, no interdito, nos critérios, nos conteúdos, pois são definidos, eminentemente, por aqueles que regem as instituições, com critérios, mecanismos e processos para reconhecimento como verdade superior, e como valorização do professor. Portanto, as conexões em rede tornam complexa a presença dos territórios virtuais e a sua vinculação com a educação.

O que Agnes Heller coadjuva para um estudo rigoroso sobre as contemporâneas transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT)? Para perfazer o que foi discutido sobre sua teoria *marxista crítica*, na sociedade humano-digital, o sujeito usa a inovação, mas aniquila e desfaz a sua objetividade, então, esse sujeito se escraviza a um retalho de realidade, encerra a sua espontaneidade, o sujeito escravo não participa do imprevisto, nem do improviso, ao alienar-se suas ações propendem para particularidade. Há uma profunda ausência de consciência da ação do sujeito alienado gerando uma voragem fronte a criação do sujeito genérico, e isso que caracteriza a conjuntura dessa alienação. Em concordância com Heller (2016 [1970], p.20): “Os choques entre particularidade e genericidade não costumam tornar-se conscientes na vida cotidiana; ambas submetem-se sucessivamente uma à outra do aludido modo, ou seja, «mudamente”.” A autora salienta que essa voragem não alcança de forma equivalente os diversos estratos sociais num processo histórico,

entretanto agravou-se exponencialmente no capitalismo neoliberal.

1.2 Inserção Social para a formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT)

A apresentação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) se concebeu em 2011, por intermédio de uma rede de instituições de Ensino Superior, via constituição da Universidade Aberta do Brasil, fomentada por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e estruturada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com a contribuição do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). De acordo com o Relatório Digital PROFMAT (2017, p.1): "o PROFMAT surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM." As políticas públicas no sentido de usar a inovação estimularam o desenvolvimento de cursos de Graduação, Mestrados Profissionais, dentre outros orientados para a EaD, pelo sistema da Universidade Aberta do Brasil (UAB), com expansão da sua oferta e engajamento de diversas instituições públicas. Esse estudo vai analisar o polo do PROFMAT na Universidade Federal do Rio de Janeiro, que oferece o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Estado do Rio de Janeiro desde a sua criação.

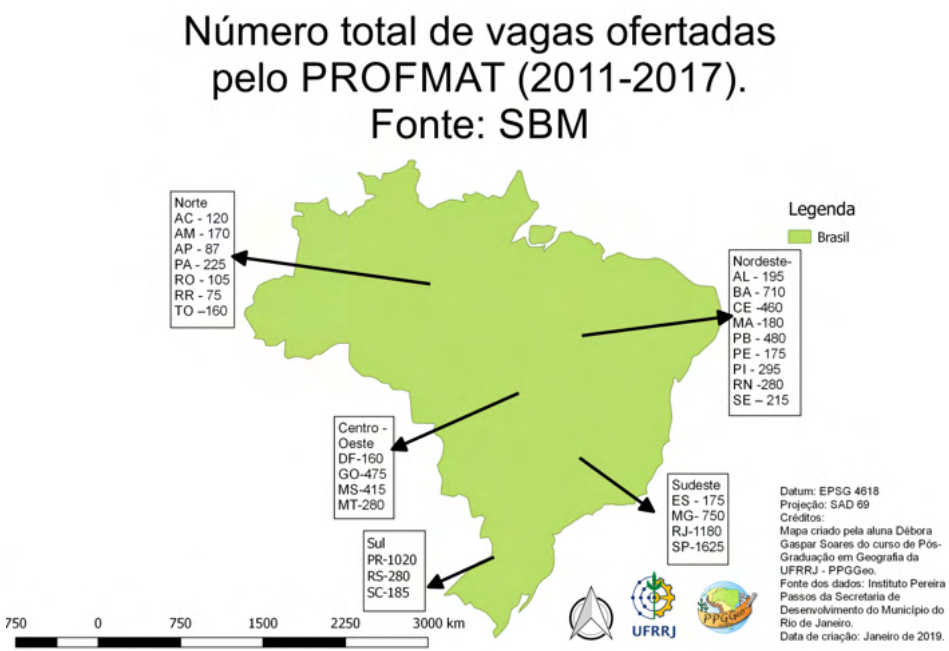


Figura 1: Número Total de vagas ofertas pelo PROFMAT (2011-2017)

Fonte: Instituto Pereira Passos.

Para realizar esse estudo com relação à inserção social na EaD analisando como, em geral, se suscita o cotidiano e a cotidianidade na formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT), e compreendendo como, em particular, a teoria de Agnes Heller interpreta nossa sociedade informacional, onde prepondera o modo capitalista de produção. O primordial recurso foi o site do PROFMAT no qual foi pesquisado, especialmente, o Relatório Digital de 2017; Regimentos; Portarias e Designações. Em seguinte, foram realizadas entrevistas que ocorreram na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, elas aconteceram no segundo semestre de 2018, com a Coordenação anterior e a atual Coordenação do PROFMAT, professores do ICE (Instituto de Ciências Exatas) que são membros do DEMAT (Departamento de Matemática da UFRRJ), essas que possibilitaram uma interação do ponto de vista das práticas produtivas, da ação cooperativa e das fontes de informação e conhecimento para inovação, respeitantes às características dessa amostra de estudo.

A efetivação, alastramento e promoção da inovação na prática pedagógica, por meio da rede em EaD, tipifica um arquétipo de inter-relação sócio espacial que reúne cidades como indicadores, que caracterizam os locais ou sítios, nos quais se organizam o contato, se criam as conexões, se formam as interações, que se geram pelos trânsitos de informações, e desenham um território virtual em rede. Destarte, a inovação no que se atribui a EaD, imputa uma expectativa social de ampliação e redimensionamento do lugar, de nova cartografia, de geração de novos caminhos, de criação de tecnologia, a partir de políticas públicas que fomentam o uso da rede nesse lugar. De acordo com Heller (2016 [1970], p.20): “o próprio cientista ou artista têm vida cotidiana: até mesmo os problemas que enfrentam através de suas objetivações e suas obras lhes são colocados, entre outras coisas (tão-somente entre outros, decerto), pela vida.” Em conformidade Lukács (2003, p.215): “os instrumentos, as reservas, e os meios financeiros, indispensáveis tanto à empresa quanto à vida econômica, estão nas mãos do empresário, num caso, e do chefe político, no outro.” Tal qual Damiani (2016, p.13) argumenta: “a industrialização envolve o imperativo do trabalho abstrato no campo e na cidade. Define-se como divisão social do trabalho, divisão campo-cidade. As relações sociais concorrenciais estruturam o fundamento das formas de sociabilidade modernas.” Esses autores evidenciam que o uso da inovação promove uma interiorização em distintos graus de arquitetura de geografia das redes. E nos fazem refletir algumas questões: Para que o uso da EaD para promoção e formação técnico-científica de Professores de Matemática? Como a rede projeta esse território virtual de práticas pedagógicas? Como o uso e difusão da rede na formação de Professores reverbera no ordenamento escolar das cidades desses professores?

A estrutura do PROFMAT no polo da Universidade Federal do Rio de Janeiro é o local de funcionamento presencial do curso, o lugar físico onde ocorrem as aulas, e se encontram o aluno, tutor, professor, coordenação e outros agentes de conhecimento. O polo do PROFMAT-UFRRJ que coordena os sistemas e a infraestrutura que viabilizam as

interações e os fluxos de informações. Apesar, do PROFMAT exigir o encontro presencial com os alunos uma vez por semana, o PROFMAT depende que a instituição polo ofereça laboratório de informática para os alunos, porque a proposta pedagógica primazia pela utilização da Plataforma Moodle de Educação, e é nesse ambiente virtual de aprendizagem que se disponibiliza os fóruns, chats, webconferências, troca de mensagens, as disciplinas, as redes de comunicação, as vídeo-aulas (não foi encontrado o tempo de atualização desse material), e material didático, que só podem ser acessados pela internet, portanto configura a dependência desse modelo educacional às tecnologias informacionais em rede. De acordo com Damiani (2016, p.14): "a era urbana real e utópica, ao mesmo tempo, é a superação da crise implicada na separação campo-cidade. Ela identifica um elemento novo: a programação do consumo, a manipulação das necessidades, através do cotidiano; trata-se da cotidianidade." Em conformidade Heller (2016 [1970], p.30) afirma: "Na maioria das formas de atividade da vida cotidiana, as motivações do homem não chegam a se tornar típicas, ou seja, as motivações em permanente alteração estão muito longe de expressar a totalidade, a essência do indivíduo." Já Lefebvre (1991, p.23) destaca que: "O homem cotidiano se fecha em suas propriedades, seus bens e suas satisfações, e às vezes se arrepende. Ele está ou parece estar mais próximo da natureza do que o sujeito da reflexão ou, da cultura." Os autores discutem sobre a alienação propiciada pela sociedade informacional, e pelo modo de produção capitalista, no quanto essa se alastra para além do cotidiano, para a própria ciência contemporânea, para os modelos educacionais, e sobre os fundamentos e estruturas da vida cotidiana.

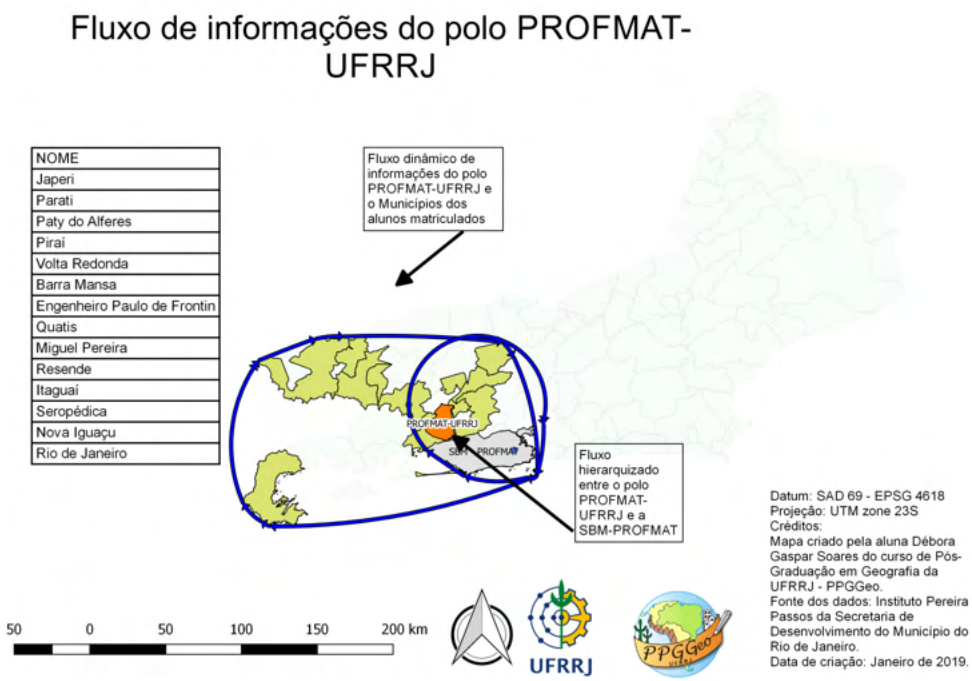


Figura 3: Fluxo de informação entre o polo PROFMAT-UFRRJ e os Municípios de origem dos alunos matriculados.

Fonte: Instituto Pereira Passos.

O PROFMAT, ao tornar-se adepto da EaD, adotou a modalidade semipresencial que busca conciliar as práticas pedagógicas virtuais e presenciais do aluno. Na Plataforma Moodle, o aluno dispõe das vídeo-aulas, material didático, guias, e as distintas redes de comunicação com Professor e Tutor à distância, assim configurando as ações do aluno em rede. Mas, esse território virtual de ensino possibilita o encontro presencial, no qual o aluno é acompanhado pelo Professor, o Tutor é à distância, que acaba sendo mediador e orientador das atividades na Plataforma e no polo. Nesse sentido, o relatório digital do PROFMAT 2017 sinaliza que a oferta da formação de Professores de Matemática na EaD enfrenta adversidades, reveses e diversos desafios relacionados a sociedade informacional. Vale destacar que essa oferta do curso está sujeita a exclusão de outros extratos sociais, a completa retração e restrição de vagas de demanda social conforme comunicado PROFMAT Nº 01/2019 de que as vagas para o processo de seleção PROFMAT/2020 são exclusivas para docentes do ensino básico das redes públicas, devido a uma nova interpretação da Portaria CAPES Nº209 de 21 de outubro de 2011. Assim, os alunos do PROFMAT, que até o presente momento são na maioria professores do ensino básico, e que devem se tornar exclusivos do ensino básico das redes públicas, e cuja formação educacional e exercício laboral são alicerçados pela modalidade presencial. Nesse sentido,

compreende-se que o seu processo histórico, memória, e formas de aprendizado seguem referências pedagógicas no contato físico, e direto aluno-professor em sala de aula. Então, o conteúdo do PROFMAT necessita desenvolver competências e habilidades na utilização e ações na EaD, para que esse professor tenha competência de transformar o seu método de aprendizagem, e acrescentar novos recursos informacionais para sala de aula e para a escola, sendo que os conteúdos oferecidos são específicos da Matemática, e a única disciplina caracterizada como Humano-Digital: Recursos Computacionais para o Ensino de Matemática é eletiva.

Contrapondo a relação dos alunos matriculados no PROFMAT-UFRRJ (2017-2019), verifica-se que os municípios de Nova Iguaçu, Rio de Janeiro e Volta Redonda, mantiveram ou ampliaram sua matrícula no polo, isso indica que houve uma divulgação, repercussão, e procura do curso pelos outros profissionais, ou seja, que há interesse pelos professores de Matemática em se capacitar no modelo EaD. Essa inserção social é relatada no Relatório Digital do PROFMAT 2017, que relata dados de um formulário respondido pelos alunos, professores e coordenadores, em que os egressos afirmam que a formação ajudou no seu desempenho profissional como maior segurança para apresentar conteúdos, habilidade para motivarem os alunos pelo conteúdo, e maior capacidade de elaboração de material didático. Outro fator relevante é que o egresso considera o curso importante no avanço da sua carreira profissional. O Relatório Digital do PROFMAT (2017, p.34) destaca: “considera-se haver uma mudança na postura e na prática da sala de aula, tendo consequentemente contribuído para a melhoria da Educação Básica, seu principal objetivo.” Para finalizar, há apenas um indicador nesse material de pertinência sócio espacial que é o aumento do envolvimento dos egressos na preparação e motivação da participação dos alunos da Educação Básica na Olimpíada Brasileira de Matemática. De acordo com Heller (2016 [1970], p.32): “o precedente tem mais importância para o conhecimento da situação que para o conhecimento das pessoas. É um “indicador” útil para nosso comportamento, para nossa atitude.” A autora elucida que as relações sociais degeneram-se conforme os sistemas funcionais da sociedade informacional geram estereótipos, vidas estereotipadas, imitação, no ofício das circunstâncias sociais de domínio, manipulação, e os comportamentos configuram-se em papéis cerceando a individualidade.

2 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A observação das informações relativas ao PROFMAT, correlacionadas a demanda sobre sua institucionalização no ambiente do polo da UFRRJ, apresenta indicativos para buscar entender o uso da modalidade EaD para promoção e formação técnico-científica de Professores de Matemática do ensino básico. Não há dúvidas que a modalidade EaD se tornou, no âmbito educacional, uma modalidade de ensino substancial e permanente, que é fomentada pela sociedade informacional capitalista. Tal condição assente significância

porque exige práticas pedagógicas mais avançadas e em conformidade com a vida cotidiana midiática, tecnológica e em rede atual. Entretanto, a oferta dessa formação de Mestrado e a inserção social desses professores de Matemática na Universidade revelam desigualdades sócio espaciais. Apesar da conexão em rede de distintos municípios, a hierarquização e sistematização do EaD cerceia a prática pedagógica; a escolha e determinação dos conteúdos a serem apresentados pelos Tutores a distância impede a autonomia de preparação pedagógica, e a falta de exigência da formação em Tutores em EaD para os professores do PROFMAT dificulta a função de mediador na Plataforma Moodle; a comunicação ser pela Plataforma Moodle limita a liberdade de expressão e o pensamento crítico dos agentes de conhecimento. De acordo com Heller (2016 [1970], p.32): "as formas necessárias da estrutura e do pensamento da vida cotidiana não devem se cristalizar em absolutos, mas têm de deixar ao indivíduo ·uma margem de movimento e possibilidades de explicitação." Em conformidade Silva (2008, p.8) elucida: "o crítico está impresso nas formas de produção e reprodução do urbano, bem como o seu produto final: um espaço posto como valor de troca [...] e o aprofundamento dos processos de segregação urbana." Esses autores explicitam que o modelo do EaD de construção colaborativa de conhecimento fomentado pelo capitalismo neoliberal elabora conhecimentos que não se propõem a esclarecer a prática da vida cotidiana, nem são capazes de responder a complexidade humana.

A geografia que está sendo delineada e tecida por meio do ordenamento territorial virtual representa um desafio para esse estudo do PROFMAT, os dados do polo presencial da UFRRJ sugerem como a rede projeta esse território virtual de práticas pedagógicas. Quanto à promoção de ciência, tecnologia, técnica, conteúdo, e informação, há a ausência de uma definição da CAPES do conceito de inovação que deve ser utilizado, ainda assim, a rede dinamiza esse território virtual e conecta os agentes de conhecimento. Nessa acepção, o polo presencial da UFRRJ equivale à zona de conexão entre os fluxos de informação e agentes de conhecimento que utilizam a rede de comunicação do PROFMAT. O ponto de partida para a formação do ordenamento territorial virtual se esboça na articulação desses centros urbanos, que arquitetam suas relações e contatos através da rede, essas configuram formas e sistemas sócio espaciais, autossuficiente da dimensão física e alcance do local, ignorando o modelo tradicional capitalista de urbanização. Nessa cinesia de ordenamento territorial virtual sobrevém a ressignificação das concepções de próximo e distante, e toda a topologia da rede é fechada, é tecida na área de interação entre conteúdo-rede, zona-conexão e virtualização-plataforma, que edifica uma teia de articulações da contemporânea sociedade informacional. Em conformidade com Lukács (2003, p.216): "surge uma sistematização racional de todas as regulamentações jurídicas da vida, sistematização que representa pelo menos em sua tendência, um sistema fechado e que pode se relacionar com todos os casos possíveis e imagináveis." O autor explica que o modelo EaD de aprendizagem colaborativa, como território virtual é um sistema

fechado que ojeriza e produz um abismo para ação do pensamento crítico, do reflexivo, do que reproduz a vida cotidiana, do familiar, do habitual, do ordinário, dos que são desconsiderados cientificamente, ou tecnicamente, ou ideologicamente.

Para perfazer esse estudo, a formação dos professores de Matemática necessita repensar a formação para o trabalho em educação. Simplesmente, porque analisando o relatório digital do PROFMAT 2017, há apenas um indicador sócio espacial destacado que é o aumento da participação dos alunos do ensino básico na Olimpíada Brasileira de Matemática. Apesar do relatório possuir um capítulo denominado "Inserção social", não está claro de que se trata nem qual extrato social alcança e transforma, pois não há uma definição de que e qual inserção social tanto da SBM, como do IMPA, como do CNPq, como da CAPES. O território virtual de rede de comunicação é baseado pela conexão e interação, e nessas condições não há dados que esclareçam como o uso e difusão da rede na formação de Professores reverbera no ordenamento escolar das cidades desses professores. Aprendizagem se constrói absolutamente por meio do diálogo, do debate, da comunicação, e a formação para o trabalho não deve dominar as vozes, as elocuções, as reflexões, o território virtual para a prática pedagógica não deve ser um sistema fechado, hierarquizado, é necessário para a educação, para o trabalho, para vida cotidiana a autonomia. Em concordância com Barthes (1977, p.9): "quanto mais livre for esse ensino, tanto mais será necessário indagar-se sob que condições e segundo que operações o discurso pode despojar-se de todo desejo de agarrar." Diante desse panorama, é crucial para a sociedade informacional uma tomada de atitude, a prática pedagógica não pode constituir como ameaça para a sociedade, é vital para função e exercício de professorar o reconhecimento dessas conjunturas, é imprescindível que a educação no território virtual quer seja no espaço da universidade, quer seja no espaço da escola pública seja oportuna, propícia e favorável para a reflexão sobre os planos, programas e concepções sociais que pretenda edificar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por esse trabalho.

Agradeço a assistência, a fundamentação e a inspiração recebida pela Pós-graduação em Geografia, a toda equipe, aos meus caros colegas, especialmente a organização, atenção e o zelo dos Coordenadores Clézio dos Santos e Márcio Rufino.

Agradeço o apoio recebido pelo grupo de Iniciação Científica: Educação e Mundo Contemporâneo (UFRRJ), a todas as discussões e questionamentos que fizeram parte da nossa amizade, e o respeito e admiração que tenho por cada um de vocês colegas. Estendo esses agradecimentos a Professora Lúcia Sartório e ao meu orientador Professor Márcio Rufino pela direção, pelas orientações, pela presença a cada momento desse trabalho e o inestimável apoio intelectual.

Agradeço a contribuição material da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) que ofereceu esse projeto, a CAPES, a FAPERJ, ao CNPq, a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), a Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), a Universidade Federal Fluminense (UFF), a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Fundação CECIERJ (CEDERJ).

Agradeço à ajuda recebida, na pesquisa bibliográfica, dos professores Giuseppe Cocco e Sarita Albagli do PPGCI/IBICT-UFRJ, ao Bruno Tarin, a todos os colegas, ao IBCT, ao LIINC e ao PPGCI. A compreensão, generosidade e a atenção do Professor Orlando Pereira, da Professora Aline Barbosa, e da Professora Rosane de Oliveira, e a toda equipe do DEMAT da UFRRJ.

Agradeço a cada um dos meus professores que ao longo da minha vida foram pacientes comigo e por me educarem. Acrescento a cada um dos meus amigos, aos colegas, aos funcionários e a todos que de alguma forma me ajudaram em algum momento.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Célia e ao meu pai Daniel por serem minhas raízes, as minhas irmãs Daniela e Diane por me incentivarem sempre, aos meus sobrinhos Maria Clara e João Vitor por me cativarem tanto amor, tenho muito orgulho de ser sua tia Dedé. Aos meus cunhados Anderson e Alex por me ajudarem incondicionalmente. A Rosana e ao Ubiraci por cuidarem de mim e das minhas irmãs com zelo e amor. Aos amigos Valfredo e Isabel por toda a atenção e carinho. E a todos os meus familiares, os meus amigos familiares, e a minha comunidade neocatecumenal pela cooperação.

Agradeço ao meu marido Ivan por me apoiar de forma extraordinária, por todos os seus questionamentos desse trabalho, por ser um grande professor, por quem tenho profunda admiração pelo seu trabalho de excelência e seu amor ao magistério. Acrescento ao meu filho Daniel que torna o meu dia feliz por acordar sorrindo todos os dias.

Muito obrigada!

REFERÊNCIAS

BAITZ, Ricardo. Implicação: um novo sedimento a se explorar na Geografia? In: Boletim Paulista de Geografia, nº 84, jul. 2016, pp. 25-50.

BARTHES, Roland. Aula. 15ª ed. São Paulo: Cultrix (2007 [1978]).

DAMIANI, Amélia Luísa (coord.) et. al. O futuro do trabalho : elementos para a discussão das taxas de maisvalia e de lucro. São Paulo: AGB/SP. Labur/Programa de Pós-Graduação em Geografia Humana, Departamento de Geografia, FFLCH/USP, 2006. 72 p.

CAPÍTULO 25

AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: EM FOCO OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Data de aceite: 01/03/2022

Ana Paula dos Santos Stelle
Universidade Estadual do Centro-Oeste,
Departamento de Matemática
Irati-Paraná

Joyce Jaquelinne Caetano
Universidade Estadual do Centro-Oeste,
Departamento de Matemática
Irati-Paraná

RESUMO: O presente trabalho consiste em um estudo bibliográfico sobre as principais dificuldades do ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e as suas possíveis causas. Trata-se de pesquisa qualitativa, em que se realizou um estudo bibliográfico das publicações relacionados ao tema, em especial, nos artigos encontrados na Revista SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) dos últimos dez anos. Após análise dos dados, verificou-se que é recorrente a preocupação dos autores em relação à superação das dificuldades em Matemática encontrada pelos alunos. Os estudos apontaram para a necessidade de implementação de novas metodologias de ensino em que os alunos sejam ativos no processo de ensino e de aprendizagem buscando experiências mais eficazes e prazerosas.
PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades, aprendizagem, matemática.

ABSTRACT: The present work consists of a bibliographical study on the main difficulties in the teaching of Mathematics in the early years of Elementary School and its possible causes. This is a qualitative research, in which a bibliographic study of publications related to the topic was carried out, especially in articles found in the SBEM Magazine (Brazilian Society of Mathematics Education) in the last ten years. After analyzing the data, it was found that the authors' concern regarding overcoming difficulties in Mathematics encountered by students is recurrent. The studies pointed to the need to implement new teaching methodologies in which students are active in the teaching and learning process, seeking more effective experiences and pleasurable.
KEYWORDS: Difficulties, learning, mathematics.

INTRODUÇÃO

Partindo da percepção negativa de que alguns alunos têm sobre a disciplina de Matemática, decorrentes das dificuldades que encontram na aprendizagem e compreensão dessa disciplina, é importante compreender como se dão tais dificuldades e encontrar caminhos alternativos para que a aprendizagem se torne mais natural e prazerosa.

De acordo com Zatti, Agranionih e Enricone (2010, p.116), "é preciso que as crianças aprendam sobre matemática para entender o mundo ao seu redor, pois, além de matéria escolar, ela é parte importante de suas vidas cotidianas". Entretanto, como disciplina escolar, observa-se que a Matemática pode ser

fonte de inúmeras dificuldades enfrentadas pelos alunos e, isto pode estar relacionado a uma série de fatores.

Essa visão despertou muita curiosidade por parte de professores e pesquisadores nos últimos anos, desvendar quando e porque essas dificuldades aparecem e como reverter tais situações. Para isso, o levantamento de pesquisas já realizadas, colaboram para entender esse quadro, em que as dificuldades de aprendizagem em matemática têm se tornado cada vez maiores, principalmente nas séries iniciais do ensino fundamental, onde o aluno desenvolve a base de sua vida acadêmica.

Portanto, essa pesquisa tem como objetivo geral, levantar a produção sobre as principais dificuldades do ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e as suas possíveis causas. Tal pesquisa se fez necessário, na medida em que

> Muitos alunos acabam assumindo que é complicado aprendê-la. Aliado a essas concepções, por vezes, o ensino da disciplina é ancorado na repetição de algoritmos e em exercícios descontextualizados. Em consequência, vários estudantes incorporam uma imagem negativa à sua aprendizagem e apresentam certo receio e até mesmo medo em relação a ela, considerando-a difícil e destinada aos "inteligentes. (FERRÃO; MEGID, 2015, p. 139)

Para essa pesquisa, foram escolhidos 10 artigos sobre dificuldades de aprendizagem em Matemática, publicados na última década pela Revista SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), tendo como foco analisar as principais dificuldades de aprendizagem em matemática presentes nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

A dificuldade de aprendizagem, conforme Fonseca, Martinez e Darsie (2013, p.02):

> Parece transitar tanto entre o grupo de ordem orgânica, patológica quanto das dificuldades momentâneas nas aprendizagens. Compreendemos que existe distinção para cada causa na explicação da não aprendizagem do aluno. Com o tempo, outros elementos foram agregados para explicar as dificuldades de aprendizagem. As explicações agora podiam ser de ordem social ou familiar, já que às vezes o diagnóstico não apontava como de ordem orgânica.

Nessa perspectiva, dificuldades de aprendizagem em matemática podem se constituir desde questões relacionadas às neurociências (funcionamento do cérebro), às questões psicológicas, bem como a possíveis obstáculos epistemológicos ou didáticos.

Segundo Fonseca, Martinez e Darsie (2013), dentro do contexto escolar é muito frequente encontrar alunos sendo rotulados com dificuldades de aprendizagem em matemática. Tal crescimento, está relacionado com a valorização da avaliação em grande escala que os órgãos educacionais vêm promovendo.

Para os autores, alguns professores, preocupados com os índices, limitam o ensino para treinar alunos a alcançarem bons resultados nos exames. Sendo assim, poucos

professores percebem as diferentes situações com que os alunos lidam para entender as propostas de atividades presentes na sala de aula. Além das avaliações em grande escala, uma das maiores dificuldades encontradas pelos alunos são as quatro operações fundamentais, que são: adição, subtração, multiplicação e divisão. No entanto, de acordo com Daniel (2015), se estas dificuldades de aprendizagem do processo de resolução dos algoritmos não forem identificadas, elas poderão comprometer a aprendizagem do aluno. Sendo assim, esses alunos precisam ser atendidos por meio de outras atividades que facilitem a superar as inseguranças, limitações ou desinteresses que apresentam por esta disciplina.

Zatti, Agranionih e Enricone (2010), citam a análise de erros como uma das maneiras eficazes para identificar as dificuldades de aprendizagem da matemática. Para isso, deve-se aplicar uma atividade e analisar atentamente os erros mais comuns encontrados nas soluções. Daniel (2015); Barreto, Reges, Batista, Chagas Barreto (2017), corroboram a ideia de analisar se o aluno comete sistematicamente os mesmos erros ou não, e se existe alguma lógica por trás de um determinado erro, pois isto, ajuda a identificar se a causa está no processo de ensino ou na aprendizagem do próprio conteúdo.

Para os autores, analisar as estratégias dos alunos ao resolverem problemas de matemática é uma ação importante para a avaliação de possíveis dificuldades e avanços que eles possam apresentar.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A pesquisa de cunho qualitativo, tratou de um estudo bibliográfico das publicações relacionados ao tema, em especial, nos artigos encontrados na Revista SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) dos últimos dez anos. Selecionamos 10 (dez) artigos que tratassem do tema no título e estivessem como foco o ensino fundamental.

Para a análise dos artigos selecionados, elegemos algumas categorias para melhor compreensão do material. Em um primeiro momento situamos as pesquisas realizadas, identificando-as com título, ano de publicação, autores de base teórica, público alvo e a metodologia, contempladas no seguinte quadro síntese:

Título	Ano de publicação	Autores	Público alvo	Metodologia
O ensino da Matemática nos anos iniciais: um estudo de caso envolvendo as operações básicas a partir da utilização de materiais concretos.	2016	AZEVEDO, J. S. S.	Alunos do 2º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do Município de Sapé-PB.	Análise da utilização de materiais concretos no 2º ano no estudo da adição e subtração.
Situações de comparação multiplicativa: o que alunos de 4° e 5° ano do Ensino Fundamental demonstram saber?	2017	BARRETO, A. L. O; REGES, M. A. G; BATISTA, P. C. S; CHAGAS BARRETO, M.	Alunos de 4° e 5° ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do Estado do Ceará.	Análise de estratégias de resolução.
Aprendizagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.	2015	DANIEL, J. E. S.	Alunos de 4° e 5° ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do Município de Curitiba.	Método de investigação e análise de erros em operações matemáticas e problemas.
A Aprendizagem em Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e os Encaminhamentos para Atendimento Pedagógico e/ou Psicológico.	2015	FERRÃO, S. H; MEGID, M. A. B. A.	Três professoras de terceiro ano – duas de sala de aula regular e uma de sala de recurso.	Entrevistas com docentes.
Dificuldades de aprendizagem em matemática: concepções de professores que atuam no 1° ciclo do ensino fundamental.	2013	FONSECA, L. L; MARTINEZ, M. C. P. T; DARSIE, M. M. P.	Professores que atuam no 1º Ciclo (1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental) da rede municipal de ensino de Cuiabá/MT.	Investigação iniciada no ano de 2011 com participação de 213 professores que atuam no 1º Ciclo (1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental) da rede municipal de ensino de Cuiabá/MT
Entre erros e acertos: revelações sobre a aprendizagem das Operações Aritméticas Elementares de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.	2015	GUÉRIOS, E; DANIEL, J. E. S.	Alunos de 4° e 5° ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do Município de Curitiba/ PR.	Análise do cotidiano da escola, as reuniões, as aulas diárias, conselhos de classe, com estudos aprofundados de 2 horas a cada três dias entre os anos de 2013 a 2014.
Metodologias utilizadas pela escola Universo no estado de Goiás para alunos com dificuldades de aprendizagem no Ensino Fundamental I e II da Educação Básica.	2015	LIMÃO, E. F.	15 alunos do Ensino Fundamental I e II	Observação de aulas de professores.

Ensino de Matemática no curso de Pedagogia: um desafio na formação continuada em serviço.	2013	NASCIMENTO, A. M. P; BRENTANO, E. M.	professores que eram alunos do Curso de Pedagogia do Programa Rede UNEB 2000.	Observação de aulas de professores - alunos e da proposição de atividades de aprendizagem e de ensino
Em busca de uma avaliação formativa: prova de Matemática em fases.	2017	OLIVEIRA, D. L.	Uma professora.	Análise da prática de uma professora de anos iniciais do ensino fundamental que transforma os momentos formais de avaliação das aprendizagens em matemática em períodos de discussão, reestruturação e ressignificação dessas aprendizagens.
Aprendizagem Matemática: Desvendando Dificuldades de Cálculo dos Alunos.	2010	ZATTI, F; AGRANIONIH, N. T; ENRICONE, J. R. B.	Alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de 17 escolas da Rede pública estadual de Erechim/ RS.	Aplicação do subteste de Aritmética do TDE (Teste de desempenho Escolar), de Lílian Milnitsky Stein (1994), instrumento psicométrico que avalia capacidades fundamentais para o desempenho escolar em escrita, aritmética e leitura.

Fonte: As autoras

Como é possível perceber os autores utilizaram diferentes estratégicas metodológicas envolvendo análise de erros dos alunos, observação de aulas de professores e de futuros professores, aplicação de teste de desempenho escolar, análise de operações e de resolução de problemas envolvendo as operações básicas. Evidencia-se nos estudos destas pesquisas, que o foco nas operações elementares, estão relacionadas ao como estas são importantes e basilares no ensino fundamental e, que, portanto, merecem um olhar mais aprofundado.

Em um segundo momento, buscamos analisar os resultados apontados nas presentes pesquisas e as possíveis sugestões de metodologias de ensino de Matemática, conforme quadro síntese:

Título	Resultados	Metodologia sugerida
O ensino da Matemática nos anos iniciais: um estudo de caso envolvendo as operações básicas a partir da utilização de materiais concretos.	Resultado satisfatório, visto que os alunos conseguiram assimilar tudo o que foi ensinado, melhoraram às dificuldades encontrada com a adição e a subtração.	Resolução de problemas utilizando material dourado.
Situações de comparação multiplicativa: o que alunos de 4° e 5° ano do Ensino Fundamental demonstram saber?	Os professores precisam desenvolver programas que contemplem os mais variados tipos de situações que abordam o campo conceitual multiplicativo.	Resolução de problemas
Aprendizagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.	O que se percebe é que muitos alunos têm dificuldades de diferentes naturezas no que tange às operações aritméticas elementares.	Resolução de problemas
A Aprendizagem em Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e os Encaminhamentos para Atendimento Pedagógico e/ou Psicológico.	Verificou-se que o encaminhamento de crianças para atendimento pedagógico e/ou psicológico pelos educadores precisa ser melhor analisado, de modo a evitar estigmas desnecessários.	Elaboração de materiais concretos
Dificuldades de aprendizagem em matemática: concepções de professores que atuam no 1° ciclo do ensino fundamental.	Boa parte desse grupo de professores apresenta dificuldades na compreensão dos elementos que envolvem e caracterizam um aluno com DAM	Atividades diferenciadas e material concreto
Entre erros e acertos: revelações sobre a aprendizagem das Operações Aritméticas Elementares de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.	Os alunos não desenvolveram o pensamento aditivo e multiplicativo sob o ponto de vista resolutivo ao não identificarem as operações aritméticas que resolvem os problemas.	Resolução de problemas
Metodologias utilizadas pela escola Universo no estado de Goiás para alunos com dificuldades de aprendizagem no Ensino Fundamental I e II da Educação Básica.	Muitos alunos são retidos, por falta de acompanhamento mais próximos não apenas fora da escola, mas principalmente dentro dela.	Mudança na composição do diário de classe e diversidade de metodologias
Ensino de Matemática no curso de Pedagogia: um desafio na formação continuada em serviço.	Mudanças na prática implicou em mudanças na representação da Matemática e em suas formas de propor e avaliar as atividades de ensino.	Utilização de materiais manipuláveis.
Em busca de uma avaliação formativa: prova de Matemática em fases.	O feedback e o envolvimento dos sujeitos com a própria aprendizagem são fatores que contribuíram para o sucesso da prova de matemática em fases.	Auto-avaliação
Aprendizagem Matemática: Desvendando Dificuldades de Cálculo dos Alunos.	Grande parte dos erros apresentados pelos alunos pode ser atribuída à não compreensão do algoritmo ou a dificuldades atencionais e/ou de memorização.	Resolução de problemas

Fonte: As autoras

De acordo, com o quadro acima identificamos seus resultados e que a maioria das pesquisas, aponta a Resolução de Problemas como metodologia de ensino da Matemática mais promissora e adequada, seguindo de utilização de materiais concretos e atividades diversificadas. Uma das pesquisas aponta a importância da auto-avaliação realizada pelos

alunos para compreenderem seus erros e acertos.

A forma como professores ensinam é uma das opções encontradas para explicar as dificuldades mais comuns dos alunos, "[...] como o conteúdo mais ensinado nos anos iniciais são os números e as operações, então o professor teria pleno domínio destes. Vimos que, em alguns casos, o que o professor conhece é o mínimo que é ensinado" (NASCIMENTO; BRENTANO, p. 6) e nessa direção, Azevedo (2016) aponta que na maioria dos casos os conhecimentos são apresentados de forma aligeirada, priorizando condutas que não garantem a aprendizagem como a memorização. Nestes casos, a falha pode estar no processo de preparo de aulas do professor.

Como afirmam Fonseca, Martinez e Darsie (2013, p.13), "quando um professor não apresenta domínio de conteúdo e pouco reflete sobre sua prática tende para defender que o aluno é o responsável por sua não aprendizagem, assim como a família". Desse modo, fica a impressão de que há um distanciamento entre o processo de ensino e de aprendizagem.

Ainda conforme Fonseca, Martinez e Darsie (2013), grande parte dos professores que atuam no Ensino Fundamental não tiveram uma formação adequada em matemática, o que acarreta obstáculos para o seu ensino e por consequência, a aprendizagem dos seus alunos.

Em contrapartida, Oliveira (2017) preocupada com essa situação buscou alternativas para facilitar a aprendizagem e descreve sobre a avaliação formativa na escola, onde a diversidade de métodos adequados às necessidades de cada aluno, o envolvimento do aluno no processo de avaliação formativa, os objetos de aprendizagem claros, os acompanhamentos são fundamentais para a melhoria de aprendizagens com autonomia, assim como fazer um feedback adequado quanto às estratégias e ao conteúdo estudado.

Outra maneira simples de ensinar matemática é relacioná-la com o cotidiano, conforme Daniel (2015), os professores de algum modo podem considerar o universo infantil na abordagem dos conteúdos, levando em consideração o uso de materiais concretos, que ajudam a amenizar tais dificuldades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pensar sobre a maneira como se aprende, conforme Oliveira (2017), requer que se reconheçam os caminhos trilhados, portanto, cada professor deve se preocupar com o que está ensinando e como seu aluno está aprendendo, utilizando alguns métodos alternativos. É importante ainda, considerar que cada aluno é único e tem o seu próprio tempo de aprendizagem e que o professor deve sempre considerar os conhecimentos prévios de cada aluno, evitando assim, comparações entre eles.

Enfim, os estudos apontaram para a necessidade de implementação de novas metodologias de ensino em que os alunos sejam ativos no processo de ensino e de aprendizagem buscando experiências mais eficazes e prazerosas.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, J. S. S. O ensino da Matemática nos anos iniciais: um estudo de caso envolvendo as operações básicas a partir da utilização de materiais concretos. João Pessoa, 2016.

BARRETO, A. L. O; REGES, M. A. G; BATISTA, P. C. S; CHAGAS BARRETO, M. Situações de comparação multiplicativa: o que alunos de 4° e 5° ano do Ensino Fundamental demonstram saber? Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 22, n. 56, p. 230-245, 2017.

DANIEL, J. E. S. Aprendizagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. Curitiba, 2015.

FERRÃO, S. H; MEGID, M. A. B. A. A Aprendizagem em Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e os Encaminhamentos para Atendimento Pedagógico e/ou Psicológico. Ensino Em Re-Vista, v.22, n.1, p.135-143, 2015.

FONSECA, L. L; MARTINEZ, M. C. P. T; DARSIE, M. M. P. Dificuldades de aprendizagem em matemática: concepções de professores que atuam no 1° ciclo do ensino fundamental. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

NASCIMENTO, A. M. P; BRENTANO, E. M. Ensino de Matemática no curso de Pedagogia: um desafio na formação continuada em serviço. Educação Matemática em Revista, 2000.

OLIVEIRA, D. L. Em busca de uma avaliação formativa: prova de Matemática em fases. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 22, n. 56, p. 125-142. 2017.

ZATTI, F; AGRANIONIH, N. T; ENRICONE, J. R. B. Aprendizagem Matemática: Desvendando Dificuldades de Cálculo dos Alunos. PERSPECTIVA, Erechim. V 34, n.128, p. 115-132, 2010

CAPÍTULO 26

IDENTIDADES POLINOMIAIS *G*-GRADUADAS PARA A ÁLGEBRA DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES $n \times n$ SOBRE UM CORPO FINITO

Data de aceite: 01/03/2022
Data de submissão: 24/02/2022

Mateus Eduardo Salomão
Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Matemática
São Carlos – SP
http://lattes.cnpq.br/9042467665583924

Evandro Riva
Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Matemática
São Carlos – SP
http://lattes.cnpq.br/4157173099755399

RESUMO: Este artigo aborda o conceito de identidades polinomiais para uma álgebra unitária, bem como apresenta o que vem a ser uma *G*-graduação em uma dada álgebra e suas identidades polinomiais *G*-graduadas. Mais ainda, apresenta a descrição de todas as identidades polinomiais *G*-graduadas para a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas pertencentes a um corpo finito.
PALAVRAS-CHAVE: Identidades Polinomiais, Graduações, Corpos finitos, Matrizes.

G-GRADED POLYNOMIAL IDENTITIES FOR THE ALGEBRA OF UPPER TRIANGULAR MATRICES $n \times n$ OVER A FINITE FIELD

ABSTRACT: This article approaches the concept of polynomial identities for a unitary algebra, as well as presents what is a *G*-graduation in a given algebra and its *G*-graded polynomial identities. Furthermore, it presents the description of all *G*-graded polynomial identities for the algebra of upper triangular matrices $n \times n$ with entries belonging to a finite field.
KEYWORDS: Polynomial Identities, Gradings, Finite Fields, Matrix.

1 | INTRODUÇÃO

Álgebras que satisfazem identidades polinomiais, denominadas PI-álgebras, integram um vasto campo de pesquisa em matemática e são de extrema importância, pois, além de aplicações computacionais, podemos, através de tais álgebras, obter importantes informações sobre sua estrutura. Daí a importância do estudo deste tema.

Neste artigo, será apresentado um conjunto gerador para as identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo finito. Tal conjunto foi descrito em [4]. O caso do conjunto gerador para as identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo infinito foi descrito em [1].

Para um estudo mais detalhado a respeito de identidades polinomiais indicamos as referências [2] e [3].

Ao longo de todo o texto, K denotará um corpo e $UT_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de tamanho $n \times n$ com

entradas no corpo K.

2 | IDENTIDADES POLINOMIAIS

Nesta seção, vamos apresentar alguns conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento deste trabalho, em especial o conceito de álgebras com identidades polinomiais. Iniciaremos definindo o conceito de álgebra livre.

Definição 1 (Associador): Seja A uma álgebra e $X \subseteq A$. Uma sequência finita de elementos de X, $x_{i_1}...x_{i_n}$ onde n≥0 e $x_{i_1}...x_{i_n} \in X$, será chamada de palavra em X. Considere $Pal(X)$ o conjunto das palavras formadas pelos elementos de X. Se todo elemento em A é uma combinação linear dos elementos em $Pal(X)$, então dizemos que A é gerado por X. Definimos o comprimento da palavra $x_{i_1}...x_{i_n}$ como sendo n. Quando n=0, vamos chamar essa palavra de palavra vazia e a denotaremos por 1. Além disso, dizemos que duas palavras $x_{i_1}...x_{i_n}$ e $x_{j_1}...x_{j_n}$ são iguais se $n=m$ e $i_1=j_1,...,i_n=j_m$.

Na sequência, definimos a estrutura de álgebra livre.

Definição 2 (Álgebra Livre): Seja V uma classe de álgebras e $A \in V$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra A é chamada livre na classe V, livremente gerada por X, se para qualquer álgebra $R \in V$, toda função $g:X \to R$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $G:A \to R$.

Definição 3: Seja X um conjunto enumerável infinito. Denote por $K(X)$ o K-espaço vetorial com base formada por 1 e pelas palavras

$$x_{i_1}...x_{i_n},$$

onde $n \geq 0$ e $x_{i_1},...,x_{i_n}$. Defina a multiplicação entre duas palavras por concatenação, ou seja:

$$(x_{i_1}...x_{i_n)}\, x_{j_1}...x_{j_m}) = x_{i_1}...x_{i_n}\, x_{j_1}...x_{j_m}$$

Estendendo por linearidade este produto para todos os elementos de $K(X)$, então $K(X)$ é álgebra associativa com unidade (palavra vazia) gerada por X.

Proposição 1: A álgebra $K(X)$ é livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias, livremente gerada por X.

Na sequência definiremos o conceito de identidade polinomial para uma álgebra.

Definição 4 (Identidade Polinomial): Sejam A uma álgebra unitária e $f=f(x_1,...,x_n) \in K(X)$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se

$$f(a_1,...,a_n)=0$$

para todos $a_1,...,a_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Se $T(A) \neq 0$, dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

Exemplo 1: Dizemos que o polinômio

$$x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2]$$

é o comutador de comprimento 2. Por indução, definiremos o comutador de comprimento n por

$$[x_1,x_2,\ldots,x_n]=[[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}],x_n].$$

Se A uma álgebra comutativa. Então temos que o comutador $[x_1,x_2]$é uma identidade polinomial para A. Logo, A é uma PI-álgebra.

3 | IDENTIDADES POLINOMIAIS *G*-GRADUADAS

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de álgebra G-graduada e identidades polinomiais G-graduadas para álgebras G-graduadas.

Definição 5: Seja A uma álgebra sobre um corpo K, considere a família $A_g, g \in G$ de subespaços de A, onde G é um grupo aditivo, dizemos que A é uma álgebra G-graduada se puder ser escrita como soma direta de subespaços

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

tais que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$, para todos $g,h \in G$.

Definição 6: Um elemento $a \in U_{g\in G}A_g$ é chamado elemento homogêneo. Se $a \in A_g$, dizemos que a é homogêneo de grau g. Dizemos que uma subálgebra B de A é homogênea na G-graduação de A, se

$$B = \sum_{g\in G} B_g,$$

onde $B_g = B \cap A_g$, neste caso os subespaços $B \cap A_g$ serão denominados de subespaços homogêneos. Se um ideal I de A é uma subálgebra G-graduada dizemos que I é um ideal homogêneo de A.

Exemplo 2: Dada uma n-upla $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in G_n$, escreva

$$UT_n(K) = \bigoplus_{g\in G} (UT_n)^g$$

onde $(UT_n(K))^g = span\{e_{(i,j)} : \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j = g\}$

Então, $UT_n(K)$ é uma álgebra G-graduada e nós dizemos que tal G-graduação é uma G-graduação elementar para $UT_n(K)$. Esta graduação é muito importante e será usada ao longo do texto.

Na sequência definiremos o conceito de isomorfismo graduado.

Definição 7: Sejam A e B duas álgebras G-graduadas. Um isomorfismo de álgebras $f: A \to B$ tal que $f(A_g) = B_g$, para todo $g \in G$ é chamado isomorfismo graduado.

O próximo resultado pode ser encontrado em [5].

Teorema 1: Toda G-graduação de $UT_n(K)$ é elementar, a menos de um isomorfismo graduado.

Definição 8: Para cada $g \in G$ considere $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$ conjuntos infinitos dois a dois disjuntos. Seja

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

Definimos

$$\deg(1) = e \quad \text{e} \quad \deg(x_1 x_2 \cdots x_m) = \deg(x_1)\deg(x_2)\cdots\deg(x_m)$$

onde $\deg(x_i)=g$, se $x_i \in X_g$. Consideremos $K(X)$ a álgebra associativa livre, livremente gerada por X e m um monômio de K(X), dizemos que deg(m)

é o G-grau de m. Fazendo

$$K(X)_g = \text{span}\{m;\ m \text{ é monômio de } K(X),\ \deg(m) = g\}$$

temos

$$K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g \quad \text{e} \quad K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{gh}$$

para todos $g, h \in G$. Assim, $K(X)$ é G-graduada chamada de álgebra associativa livre G- graduada. Se $f \in K(X)_g$, dizemos que f é homogêneo de G-grau g e usamos a notação $\deg(f)=g$.

Agora, vamos definir o conceito de identidades polinomiais G-graduadas.

Definição 9: Seja $A=\bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1,...,x_n) \in K(X)$ é uma identidade polinomial G-graduada para A se $f(\alpha_1,...,\alpha_n)=0$ para quaisquer $\alpha_i \in A_{\deg(x_i)}$. com $i=1,...,n$. Se A é uma álgebra G-graduada vamos denotar por $T_G(A) \subset K(X)$ o conjunto das identidades G-graduadas satisfeitas pela álgebra A. Além disso, $T_G(A)$ é um ideal de $K(X)$ invariante por endomorfismos graduados.

Exemplo 3: O polinômio $[x_1,x_2]\ [x_3,x_4]... \ [x_{2n-1},x_{2n}]$ é uma identidade polinomial G-graduada para $UT_n(K)$ para todos $x_i \in X$.

Definição 10: Seja $\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) \in G^n$. Dizemos que η é uma sequência ε-boa se existe uma sequência de m matrizes unitárias $(r_1,...,r_m)$ estritamente triangulares superiores tais que

$r_1,...,r_m \neq 0$ e $deg_G(r_i)=\eta_i$

para todo $i=1,...,m$ Caso contrário, η é chamada de uma sequência ε-ruim.

Definição 11: Seja $\eta =(\eta_1,...,\eta_m) \in G^m$. Para cada $j=1,...,m$ defina o conjunto C_j da seguinte forma:

$$C_j = \begin{cases} x_j^{\eta_j} & se\ \eta_j \neq 1 \\ \{[x_{2j}^1, x_{2j+1}^1], (x_{2j}^1)^q - x_{2j}^1\} & se\ \eta_j = 1. \end{cases}$$

Se $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$,..., $c_m \in C_m$, dizemos que $f_\eta=c_1c_2...c_m$ é um η-polinômio.

O próximo teorema é o resultado principal deste trabalho e sua demonstração pode ser encontrada em [4]. Aqui, $T_G(UT_n(K),\varepsilon)$representa o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de $UT_n(K)$ com a G-graduação elementar induzida por ε.

Teorema 2: Seja G um grupo e seja $\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) \in G^n$. Se $K(X)$ é um corpo finito com q elementos, então $T_G(UT_n(K),\varepsilon)$ é gerado, como T_G-ideal, por todos η-polinômios, onde $\eta=(\eta_1,..., \eta_m)$é ε-ruim e $m\leq n$.

REFERÊNCIAS

[1] **DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P.; VALENTI, A**. Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities.. **Journal of Algebra**, v. 275, n. 2, p. 550–566, 2004.

[2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[3] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[4] GONÇALVES, D. J.; RIVA, E. Graded polynomial identities for the upper triangular matrix algebra over a finite field. **Journal of Algebra.** v. 559, p. 625–645, 2020.

[5] VALENTI, A.; ZAICEV, M. V. Group gradings on upper triangular matrices. **Arch. Math. (Basel)**, v. 89, n. 1,, p. 33-40.

CAPÍTULO 27

UMA REFLEXÃO SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Data de aceite: 01/03/2022

Francisco Odecio Sales
http://lattes.cnpq.br/5358752623192820

Maria Aliciane Martins Pereira da Silva
http://lattes.cnpq.br/2449010017186245

RESUMO: Este trabalho ressalta a hipótese de que a sala de aula é antes de tudo um espaço oportuno para pesquisa, onde há oportunidade para o desenvolvimento de concepções que oportunizam e auxiliam na prática dos docentes em Educação Matemática. Na constatação de tal hipótese, compreendem-se três fundamentais aspectos: o primeiro se refere ao sujeito, ao contexto e ao campo da pesquisa, onde define-se o pesquisador como professor-pesquisador em Educação Matemática. O aspecto seguinte trata da compreensão que o professor-pesquisador tem sobre as concepções de Laboratório de Ensino de Matemática, relacionando reflexões de seu trabalho e concretizando sua pesquisa nesse espaço. Já o terceiro aspecto, discute a criação de um documento que sistematize tal processo, conhecido como sequência didática. É na sequencia Didática que o professor-pesquisador mobiliza saberes e concretiza sua pesquisa. Desta forma, perpassando entre teoria e prática, as atividades realizadas nos estágios supervisionados possibilitam um recorte da realidade, onde tais argumentos e teorias são validados na práxis diária do magistério. Os aprofundamentos nesses aspectos revelaram argumentos e fatos que apontam para a sala de aula como lócos privilegiado para se fazer pesquisa em Educação Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Sala de Aula, Professor-pesquisador, Sequência didática.

ABSTRACT: This work emphasizes the hypothesis that the classroom is, above all, an opportune space for research, where there is an opportunity for the development of conceptions that provide opportunities and help in the practice of teachers in Mathematics Education. In the realization of such a hypothesis, three fundamental aspects are understood: the first refers to the subject, the context and the field of research, where the researcher is defined as a teacher-researcher in Mathematics Education. The next aspect deals with the understanding that the teacher-researcher has about the conceptions of the Mathematics Teaching Laboratory, relating reflections on his work and concretizing his research in this space. The third aspect, on the other hand, discusses the creation of a document that systematizes such a process, known as didactic sequence. It is in the Didactic sequence that the teacher-researcher mobilizes knowledge and carries out his research. In this way, passing between theory and practice, the activities carried out in the supervised internships allow a clipping of reality, where such arguments and theories are validated in the daily praxis of the teaching profession. The deepening of these aspects revealed arguments and facts that point to the classroom as a privileged place to carry out research in Mathematics Education.

KEYWORDS: Classroom, Teacher-researcher, Didactic sequence.

1 | INTRODUÇÃO

Na tentativa de consolidar a hipótese de que a sala de aula é um espaço privilegiado para pesquisar-se, ou seja, a aula de Matemática é uma oportunidade para o professor debruçar-se sobre a pesquisa em Educação Matemática, percorremos três aspectos fundamentais na construção dessa teoria: O contexto da pesquisa, o Laboratório de Ensino de Matemática e a Sequência Didática.

O contexto da pesquisa em Educação Matemática também compreende a atuação do pesquisador e sua caracterização como professor-pesquisador em na área. Sob esse aspecto compreendemos o que vem a ser pesquisa, como tal processo se entrelaça com a atividade do magistério de Matemática, como define-se pesquisador, qual sua relação com o campo de investigação e quais características do perfil acadêmico e de formação profissional.

O segundo aspecto é alicerçado sob o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), onde evidencia-se o que é tal espaço, suas principais concepções, além de como o LEM se materializa em sala durante a aula de Matemática. Ao decorrer do trabalho, constrói-se um esboço sobre o entendimento da sutil relação entre pesquisa e prática docente em Matemática, relacionando ao reconhecimento do LEM como espaço de ensino-aprendizagem do conhecimento em Matemática.

No que tange o terceiro aspecto, tenta-se descrever a Sequência Didática (SD), instrumento de gestão que mobiliza e tenta consolidar a pesquisa na sala de aula, por considerar-se a mesma como um sistemático instrumento de planejamento para as ações do professor-pesquisador na área de Educação Matemática. É um registro documental de concepções, ideias, práticas exitosas e fazeres didático-pedagógicos oriundos de observação, experimentação e validação no próprio loco da pesquisa.

No processo de construção e sistematização de Sequências Didáticas o professor-pesquisador incorpora sua pesquisa embasada na concepção de LEM. E a Sequência Didática torna-se um instrumento de oportunização e elaboração de pesquisas na sala de aula de Matemática.

Mostremos então três exemplos de concepções de LEM os quais foram embasados via pesquisa visando à prática docente em Matemática. Ressalto ainda que tais exemplos são frutos de experiências vivenciadas em sala de aula por professores das mais diversas redes de ensino, obtido via cunho bibliográfico.

A experiência inicial reporta ao LEM em uma concepção de uso de *Materiais Concretos,* bem descrito em Lorenzato (2006), tendo assim sua problematização e o uso do Material Dourado Montessori para trabalhar as quatro operações essenciais no conjunto dos naturais, bem como o sistema de numeração decimal.

A experiência subsequente utiliza o LEM com uma concepção *Experimental* onde a sala de aula em si já é aceita como espaço onde se cria situações dentro de um contexto

que possibilita o desenvolvimento e a consolidação do conhecimento matemático a ser ensinado como forma de aprendizagem respaldada de acordo com as limitações e necessidades dos alunos, fundamentando assim, um planejamento adequado.

Já terceira experiência a concepção se dá sob a soma ou conjunto das experiências dos laboratórios de *Materiais Concretos* e *Experimental,* de acordo com Lorenzato (2006), dado que o mesmo teve como produto final a criação de uma oficina de formação continuada para professores de Matemática da Educação Básica.

O principal objetivo desse trabalho é apresentar argumentos e considerações que enfatizem a sala de aula como um locos privilegiado para pesquisa, e de maneira mais específica, desvendar aspectos intricidos a tal hipótese: A pesquisa em sala de aula, as concepções de LEM e a Sequência Didática.

A metodologia usada para a construção desse trabalho pautou-se majoritariamente em pesquisas bibliográficas nas quais podem enfatizar maior presença nos fundamentamos de Lorenzato (2006), Costa (2007), Andrade (2009), Backes (2013) entre tantos outros. Também se fez uso de relato de experiências de professores da rede estadual além das experiências de estágio como a todos os alunos de Licenciatura em Matemática.

Torna-se essencial então a existência e solidificação não somente na formação inicial, mas, sobretudo na formação continuada de professores de Matemática a reflexão, o estudo e entendimento das concepções de LEM, do papel do professor quanto pesquisador, o que vem a ser a investigação em Educação Matemática e como a pesquisa nesse campo corrobora para Educação Básica de qualidade.

A consolidação desse conjunto de ideias aqui apresentado pode trazer melhoria significativa nas práticas dos docentes em Matemática, observada sempre a entrelaçada relação entre teoria e prática, não esquecendo o viés da pesquisa e do fazer didático-pedagógico.

2 | A PESQUISA NO CONTEXTO DA SALA DE AULA: A MATEMÁTICA EM PAUTA

Para maior compreensão do processo de ensino e pesquisa em sala de aula na disciplina de Matemática, se faz necessário pontuar alguns dos elementos desse contexto: O que é pesquisa? Quem é o pesquisador? Quem é o professor-pesquisador? Qual seu campo de pesquisa? Que diferencial esta a pesquisa aponta?

Recorrendo ao “Aurélio”, *Pesquisa* configura ato ou efeito de pesquisar, investigação ou estudo, sistemático e minucioso, com o intuito de descobrir fatos relativos a um dado campo do conhecimento. Já *Pesquisar*, de acordo com o mesmo dicionário, significar buscar com diligência, inquirir, informar-se a respeito de, fazer pesquisa.

No contexto desse estudo devemos entender que a *Pesquisa* deve ser desenvolvida pelo profissional professor de Matemática, buscando conhecimento e informação visando

significativa melhoria no desenvolvimento de seu trabalho na sala de aula.

Observando *professor* e *pesquisador*, nota-se que os objetivos de pesquisa de cada um são diferentes, porém complementares. Então defini-se pesquisador como aquele que exerce a atividade de buscar e reunir informações sobre determinado problema ou assunto e analisá-las, utilizando para tanto o método científico com o objetivo de expandir o conhecimento num dado assunto, buscando descobrir algo novo ou subjulgar conjecturas válidas até então.

Segundo concepções que regem os profissionais da educação, professor é o profissional que ministra, relaciona ou instrumentaliza os estudantes para aulas ou cursos nas diversas etapas e modalidades educacionais.

Compreende-se que os conceitos de *professor* e *pesquisador* são distintos a grosso modo na literatura usual, porem já considerada obsoleta quanto se pensa no locos da pesquisa docente. Mesmo assim, partindo desse entendimento podemos visualizar outros fatores que se diferenciam no contexto: a finalidade e objetivos da pesquisa, quem é o professor-pesquisador e qual é o campo para investigação. Desta forma, enunciamos outros fatores do trabalho do profissional de Matemática no exercício da docência.

Sob essa ótica o *professor-pesquisador* é aquele que parte das questões relativas à sua práxis objetivando aprimorá-la, pesquisando para ministrar suas aulas de uma maneira melhor, visando às dificuldades que os alunos encontram em aprender determinados conhecimentos.

Tomando como ponto de partida a formação inicial em Matemática, diferimos dois profissionais de Matemática: o *bacharel* e o *licenciado pleno*. Este primeiro vivencia a pesquisa através da preocupação com a validade e a aceitação pela comunidade científica tanto da Matemática como das áreas fins, a tão falada da academia de Matemática. O licenciado por sua vez, famoso professor de Matemática, tem por preocupação maior com a melhoria do ensino de disciplina, desde a forma de se ensinar determinado assunto até o planejamento de suas ações didático-pedagógicas de forma sistémica em seu local de trabalho, em particular a sala de aula.

No que se refere aos objetivos a pesquisa oriunda do professor-pesquisador tem como característica primordial resultados que serão aplicados diretamente em sala com seus alunos, enquanto o bacharel em Matemática, classicamente chamado de pesquisador, a pesquisa está inerente às descobertas científicas no mundo acadêmico, com o contexto de aplicações tecnológicas dentro de diversas áreas de atuação.

Percebe-se dessa forma que o professor-pesquisador é um sujeito reflexivo de suas ações e entende que a atividade desse professor aliada à pesquisa é elemento essencial para o desenvolvimento profissional. A convergência da pesquisa com a prática docente no processo de ensino caracteriza um professor reflexivo, aquele que reconstrói reflexivamente seus saberes e sua prática.

Entende-se que a experiência em si não é, no seu tocante, formadora e chama

atenção para a necessidade de reforma curricular para consolidar uma formação teórica sólida do professor-pesquisador, seja na formação inicial e continuada.

De acordo com Backes (2013), para que na pesquisa não haja prevalecimento da prática sobre a teoria e do senso comum sobre o conhecimento sistematizado, é necessário observar-se que:

- Confirmar uma prática adaptativa com relação aos problemas pré-existentes, a reflexão passa a ser sinônimo de resolução de problemas na escola;
- Reduzir ao invés de elevar as possibilidades reais de reflexão crítica do professor;
- Reduzir possibilidades do professor aproximar-se de uma discussão teórica sem que a mesma não seja orientada para um fim imediato.
- Não esquecer que nem todo conhecimento produzido precisa ser orientado e nem a prática escolar nem a educação podem restringir à sala de aula;
- Desqualificar a universidade como instância formadora de professores.

Tal preocupação é inerente à formação do professor-pesquisador, haja vista a existência de cursos de formação continuada leva-os a percepção que a prática por si não é suficiente para contempla-los. Por exemplo, um professor utiliza o papel milimetrado para as aulas de plano cartesiano (seja em funções seja em Geometria Analítica), pois esse é um recurso que facilita aprendizado dos estudantes. Com o passar do tempo e pautado em experiências fomentadas em sala de aula, que sedimentam tal facilidade na compreensão com esse recurso, o professor entende que a metodologia funciona, mas muitas vezes não existe uma reflexão por parte do professo, sobre o porquê funciona ou a sistematização de ideias (teorias) que fundamentem trabalhar com papel milimetrado.

A importância de formar professores-pesquisadores pauta-se na educação para o pensamento reflexivo sobre aquilo que se ensina e se aprende e não meramente de transmitir conhecimentos matemáticos. A preocupação com a formação do professor-pesquisador em Matemática está fundamentada na intenção de tirar a educação somente da replicação de conhecimentos já consolidados. Dessa forma a pesquisa possibilitar aos professores de Matemática o exercício de um trabalho com os estudantes que busque à formulação de novos conhecimentos e questionamentos a cerca da validade e pertinência dos mesmos.

A tarefa de formar inicial e continuamente os professores-pesquisadores em Educação Matemática com referenciais teóricos e bases concretas para uma visão crítica e reflexiva diante da prática pedagógica e do conhecimento matemático não é uma missão fácil, porém o desenvolvimento de ações que promovem isto repercutirá na melhoria do ensino e aprendizagem matemática.

> Nessa perspectiva de diálogo e formação, as transformações da prática passam a ser consideradas como sínteses de mediações, continuadamente

> renovadas, entre ação e reflexão e requerem o papel ativo do professor construindo o seu próprio desenvolvimento profissional. (FRANCO, 2005).

Entendemos então a prática pedagógica como uma prática reflexiva e não meramente técnico, pois exige que os professores estudem, para poderem saber refletir melhor sobre seu trabalho, de forma que a pesquisa se converta em estratégias para o desenvolvimento de suas aulas.

O professor deve também compreender e desenvolver ações como professor-pesquisador (professor reflexivo), pois desempenha papel primordial na atuação de ensino e pesquisa no campo da Educação Matemática. Sua ação reflexiva contribui para o aperfeiçoamento sistemático do profissional Educador Matemático, atuando como provedores da produção do conhecimento quer seja com relação à melhoria das práticas pedagógicas em sala de aula ou mesmo no desenvolvimento para a formação inicial e continuada de futuros profissionais da área.

2.1 Educação matemática

Educação Matemática é um campo de pesquisa com diversas perspectivas, tornando-se necessário entender o que de fato ela é e o que se discute no seu campo de investigação.

Nesse panorama caracteriza-se um educador matemático sob a ótica de pesquisa da Educação Matemática, como um profissional que:

> Tende a conceber a matemática como um fim em si mesma [...] o educador matemático, em contrapartida, tende a conceber a matemática como um meio, ou um instrumento importante à formação intelectual e social das crianças, jovens e adultos; também, o professor de matemática do ensino fundamental e médio, por isso, tenta promover uma educação pela matemática. Ou seja, o educador matemático, na relação entre educação e matemática, tende a colocar a matemática à serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, sem estabelecer uma dicotomia entre elas. (LORENZATO, 2006, p. 3-4).

Podemos então citar dois objetivos fortes quando se fala em pesquisa na Educação Matemática:

> O primeiro, de natureza pragmática, visa melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem dos conteúdos matemáticos. O segundo, de natureza científica, visa desenvolver a Educação Matemática enquanto campo de investigação e produção de conhecimentos. (COSTA, 2007, p.3).

Dentro de tal contexto, entre a concepção de pesquisa e conceituação em Educação Matemática, começamos a explicitar o perfil do professor-pesquisador nessa área de investigação.

O entendimento da Educação Matemática como aprendizagem integrante das práticas sociais define o que é preciso para o trabalho de um professor-pesquisador em

Educação Matemática, pois será através dessas necessidades que o mesmo desenvolverá o currículo de Matemática, metodologias apropriadas para o trabalho nas áreas temáticas da Matemática: Tratamento da Informação, Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas.

No que tange à formação de um futuro professor-pesquisador em Educação Matemática é salutar observar-se o desenvolvimento e conhecimento de determinadas competências que devem estar ligadas direta ou indiretamente as perspectivas profissionais da Educação Matemática.

É de suma importância compreender o perfil profissional do professor de Matemática para conhecer o perfil desse pesquisador, até porque em sua formação inicial muitas vezes não há consistência no desenvolvimento de uma prática pedagógica que trate dos conhecimentos matemáticos de acordo com seu locos de atuação futura, a escola.

Todavia, em Matemática coexistem dois tipos de profissionais: o *bacharel* e o *licenciado*, que têm campos de atuação e perfis profissionais bem distintos. Ressaltamos que, do ponto de vista da pesquisa, o bacharel tem objetivos, finalidades e aplicações diferentes do licenciado, porém não mutuamente excludentes.

Em suma o bacharel lida com a Matemática Acadêmica, que segundo Moreira & David (2003), "é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais". Nesse contexto as definições, demonstrações e provas de dado teorema e o rigor na linguagem utilizada enche um espaço de lugar e de tempo importantes, que através de tais aspectos um determinado resultado é aceito como verdadeiro pela comunidade Matemática.

Assim o professor de Matemática lida com a Matemática Escolar, aquela que e desenvolvida no âmbito da escola. O conhecimento existente hoje em matemática é muito maior do trabalhado sala de aula. É importante que o professor de Matemática tenha sensibilidade para selecionar conhecimentos de forma que a apresentação aos alunos seja feita com bom senso, baseado em estudos e adaptações.

Embora na formação inicial os professores geralmente não conheçam ou não saibam diferenciar a Matemática Escolar da Matemática Acadêmica, é necessário que os mesmos sejam cientes da distinção, pois o seu campo de atuação e o seu trabalho são desenvolvidos a luz do conhecimento da Matemática Escolar.

Referente ao conhecimento da Matemática Escolar é importante o professor saber lidar com o rigor de demonstrações e resultados matemáticos expostos em sala de aula, utilizando uma linguagem acessível, sem perder a consistência. Quanto à construção dos conhecimentos matemáticos, o professor deve ser habilidoso para não somente diferenciar Matemáticas Acadêmica e Escolar, mas saber utiliza-las da melhor forma.

O desencadeamento dessas ideias abre uma reflexão a cerca do saber matemático acumulado pelo professor, convertido em um saber escolar a ser ensinado aos alunos. Os PCNs nos dizem que:

> Tornar o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de serem comunicados diretamente aos estudantes. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. (BRASIL, 1998, p.36).

Então, adequar metodologias ao nível de escolarização ao público que vai ensinar e descrever definições mais descritivas dos conteúdos. É um papel do professor que compreende que desenvolve uma Matemática Escolar, pois assim, ele media uma aprendizagem com mais significados. Nessa linha de concepção, podemos compreender as principais diferenças entre o professor de Matemática e o Matemático, tanto com relação à pesquisa, quanto ao campo de atuação e perfil profissional.

3 I LABORATÓRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O LEM pode vir a ser a materialização da pesquisa em Educação Matemática, haja vista que suas várias concepções, desde um ambiente de experimentação teórica e de prática pedagógicas dos professores até um local de planejamento e utilização de mídias e recursos didáticos, tornando-se um lugar de oportunidades e um espaço diferenciado para encaminhar descobertas, encantamentos e conhecimento matemático produzido ou absorvido. Norteemos esse capítulo sob as seguintes indagações: O que vem a ser um LEM? Quais suas principais concepções? Quais referências teóricos, autores e documentos subsidiam a pesquisam sobre o LEM?

Lorenzato (2006) e outros autores no livro: *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores* trazem uma abordagem do LEM e da formação continuada de professores, em especial aos de Matemática. No contexto atual pode ser considerado um dos principais pesquisadores em Educação Matemática que discorre sobre os possibilidades do LEM. Outra autora importante que pesquisa no mesmo âmbito é Calvetti apud Andrade (2009), na Revista PEC Laboratório de Matemática.

Nessa perspectiva pode-se entender LEM como um *lugar que favorece o desenvolvimento de atitudes positivas para com o ensino de Matemática,* Andrade, (2009) como:

I. O despertar da curiosidade do aluno para buscar o entendimento das relações, propriedades e padrões de um dado assunto;

II. A construção de competências, habilidades, conceitos e procedimentos matemáticos por meio das próprias investigações e experimentações;

III. O desenvolvimento da autonomia no aprendizado.

Atualmente, um questionamento que muito incomoda professores de Matemática é como ensinar Matemática em um mundo globalizado, cheio de informação instantânea, onde os estudantes estão ligados por redes sociais, jogos eletrônicos, internet entre outras

Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

O LEM se mostra como mecanismo e estratégia para o ensino de Matemática no âmbito dos recursos da globalização, pois segundo Andrade (2009, p.2), tem como um dos seus principais objetivos "construir conhecimento matemático, através da utilização de recursos didáticos e práticas de atividades lúdicas que propiciem o desenvolvimento de técnicas intelectuais e sobre tudo relações sociais".

Todavia, o LEM como *tecnologia de ensino* não é algo novo. Registros históricos acusam que essa ideia já existia:

- O ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato;
- A necessidade da experiência para alcançar o conhecimento;
- Rousseau em 1770 recomenda a experiência direta sobre objetos, visando à aprendizagem;
- Pestalozzi e Froebel, em meados de 1800, reconhecem que o ensino deve começar do concreto;
- Por volta de 1900, Dewey confirma o pensamento de Comênius;
- Montessori desenvolveu materiais didáticos que visam dar sentido à aprendizagem, em 1930.
- Em 1977 Piaget afirma que o conhecimento se dá pela ação reflexiva sobre o objeto;
- Vygotsky em 1984, afirma que as experiências do mundo real constituem o caminho para a criança construir o raciocínio.

Figura entre os papéis do professor-pesquisador em Educação Matemática conhecer o que é o LEM e saber como trabalhar o que já existe nele, dado que na perspectiva atual, um professor de Matemática não deve ensinar Matemática tão somente respaldada em metodologias tradicionais, já que as mesmas não suprem a necessidade real de estudantes e da sociedade contemporânea.

Esse arcabouço de ideias sobre o LEM leva a uma percepção sobre a existência de diferentes e diversas concepções para esse conceito. Resumidamente, podemos caracterizar o LEM, com três concepções básicas:

I. Local para guardar materiais essenciais para as aulas, tais como: livros, transparências, materiais manipuláveis, e também para guardar as matérias-primas instrumentos utilizados para confeccionar materiais didáticos;

II. Local reservado para aulas regulares de matemática, para tirar dúvidas, para planejamento de atividades;

III. Espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevistas na prática, em virtude dos questionamentos dos alunos durante as aulas.

Do ponto de vista de uso e atuação do LEM, o caracterizamos com as seguintes concepções:

- **Laboratório com material concreto**: consiste na elaboração dos conteúdos de uma série da modalidade de ensino através da manipulação de materiais como: régua, esquadro, sólidos geométricos, ábaco, material dourado, entre outros.
- **Laboratório livre:** consiste na apresentação de conteúdos anteriores de maneira livre por parte dos estudantes e para cada caso busca-se relacionar as ideias com conhecimentos novos.
- **Laboratório experimental:** consiste em que cada aluno, a partir de seus conhecimentos prévios e auxiliados por novos materiais, busque obter resultados de qualquer natureza sem relatório ou roteiro planejado.
- **Laboratório com computador**: consiste na utilização de softwares matemáticos a fim de que os estudantes experimentem, descubram e explorem algum conteúdo matemático, mediado pelo professor. Citamos *winplot*, *geogebra, régua e compasso* entre outros.

3.1 Pesquisa e sala de aula

Do ponto de vista da formação inicial de professores de Matemática o LEM possui papel de grande relevância, pois a implementação da prática pedagógica nos espaços dos **laboratórios de ensino de Matemática** revela o caráter interdisciplinar necessário na formação inicial de professores, uma vez que as vivências serão compartilhadas por orientadores vinculados aos eixos que compõem a estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática, oportunizando uma gama infinita de oportunidades e perspectivas para o desenvolvimento de pesquisas.

Dessa maneira, questões sobre o que é LEM, qual sua função e quais as suas atribuições dentro do processo de ensino e aprendizagem fazem parte dos questionamentos do professor-pesquisador em Educação Matemática, pois podemos afirmar que tal “lugar” é de fato importante para o ensino da Matemática, pois são claros que se devem traçar determinados objetivos para o LEM cujos que estão citados no ALAGOAS CAIITE (2013) entre outros baseados nele como:

- Utilizar o material didático manipulável como auxilio na reconstrução e compreensão de conceitos matemáticos;
- Utilizar jogos para auxiliar na compreensão do pensamento matemático;
- Escrever em linguagem científica sobre resultados dos experimentos realizados;
- Construir materiais didáticos manipuláveis para utilizar na compreensão de conceitos matemáticos abordados no ensino fundamental e médio;

- Servir como preparação de aulas para o estágio supervisionado;
- Discutir estratégias a serem desenvolvidas e aplicadas em sala de aula;
- Desenvolver atividades de reflexão do contexto escolar, planejando e avaliando as ações;
- Rever as formas de atuação na sala de aula;
- Contribuir para a melhoria do aprendizado de conceitos e definições matemáticas;
- Relacionar as diversas disciplinas envolvidas no período letivo, buscando entender e avaliar como está o desenvolvimento do aluno no caráter inter e transdisciplinar;
- Avaliar a forma de atuação de cada aluno no processo de discussão de ideias em sala de aula;
- Fazer análise de livros didáticos e paradidáticos.

Faz-se necessário entender que a relação entre pesquisa e sala de aula está pautada na visão de que o LEM é um espaço de ensino e de aprendizagem do conhecimento matemático, é compreender a prática de pesquisa no campo da Educação Matemática que o professor-pesquisador desenvolve e vivencia, utilizando as experiências no aprimoramento de suas práticas pedagógicas, do ato de ensinar Matemática de uma maneira diferenciada, atendendo as expectativas dos estudantes.

O professor-pesquisador em Educação Matemática tem que saber identificar seu campo de atuação, que segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, nº 9394/96 no artigo 21, é a Educação básica, formada pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Enfatizam-se tais informações, pois muitos dos professores em formação inicial desconhecem que a Educação Básica é o campo de atuação de quem está num curso a licenciatura em Matemática.

Assim deve-se buscar o entendimento a respeito da legislação educacional em relação ao conhecimento matemático ou área da Matemática, acordante com o seguinte pensamento ou visão que:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os estudantes saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos de outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente constituído; saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (MEC/SEB, 2008, p.69).

O “ensinar Matemática” deve pautar-se em duas questões primordiais: Fazer uso da Matemática para resolver problemas do cotidiano e perceber a mesma como conhecimento histórico-social, construído pelo homem ao longo de sua existência

motivado por necessidades reais do entendimento do mundo a sua volta, constituído para o desenvolvimento científico e tecnológico.

No capítulo que se segue abordaremos a relação entre o professor-pesquisador em Educação Matemática, as concepções de LEM mediada por experiências práticas/pesquisa materializada e consolidada a luz da construção e desenvolvimento das sequências didáticas.

4 I SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De acordo com Zabala (1998, p. 18), sequência didática é "o conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos". Considera-se que o planejamento consolida o trabalho do professor-pesquisador em Educação Matemática e a Sequência Didática é o produto que materializa os saberes mobilizados durante a pesquisa. É um processo dinamismo, de desenvolvimento e dialogicidade entre teoria e prática.

A sequência didática é um conjunto de propostas relacionadas a determinado conteúdo com uma ordem de desenvolvimento e continuidade. Pioneiro na pesquisa sobre como os alunos aprendem Matemática, o francês Guy Brousseau desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, que baseia-se no princípio de que ''cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação'', entendida como uma ação entre duas ou mais pessoas. Uma boa sequência didática para trabalhar o sistema de numeração decimal contempla em suas etapas os quatro tipos de situação didática descritos pelo educador:

- Ação: Fase na qual são tomadas decisões, respondidas perguntas, colocando saberes em prática para resolver um problema proposto, como a escrita de um número desconhecido. É quando surge um conhecimento não formulado matematicamente.
- Formulação: Quando os alunos são levados a explicitar as estratégias usadas para escrever aquele número. Para isso, precisam formulá-las verbalmente, transformando o conhecimento implícito em explícito. O aluno retoma sua ação em outro nível e se apropria do conhecimento de maneira consciente.
- Validação: Etapa de debates. A criança demonstra para todos as suas estratégias, confrontando os jeitos diferentes de se produzir o número. "O aluno não só deve comunicar uma informação como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado", diz Brousseau.
- Institucionalização: Aqui aparece o caráter matemático do que as crianças validaram. É uma síntese do que foi construído durante o processo e tem uma sistematização socialmente estabelecida. O professor tem papel ativo, selecionando e organizando as situações que serão registradas.

O termo Sequência Didática surgiu no Brasil nos documentos oficiais dos PCNs: Parâmetros Curriculares Nacionais como “projetos” e “atividades sequenciadas”. A organização do trabalho pedagógico por meio de sequências didáticas constitui um diferencial pedagógico que colabora na consecução dos objetivos expressos nos quadros dos direitos de aprendizagem.

Nesse sentido, o trabalho com sequência didática torna-se importante por contribuir para que os conhecimentos em fase de construção sejam consolidados e outras aquisições sejam possíveis progressivamente, pois a organização dessas atividades prevê uma progressão modular, a partir do levantamento dos conhecimentos que os alunos já possuem sobre um determinado assunto.

Ao organizar a sequência didática, o professor poderá incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas, etc., pois a sequência de atividades visa trabalhar um conteúdo específico, um tema ou um gênero textual da exploração inicial até a formação de um conceito, uma ideia, uma elaboração prática, uma produção escrita.

Ressalta-se que as atividades de avaliação estarão presentes em diferentes atividades no decorrer e no final da sequência didática. Ao propor atividades exploratórias é possível avaliar o que a criança já sabe a respeito do assunto tratado.

A seguir tratemos de argumentos que esclarecem e caracterizam essa hipótese. Para tanto sugerimos de três experiências que demonstram as concepções diferentes de LEM. Além disso, durante este capítulo, perceberemos a materialização da pesquisa mobilizada pela sequência didática acontece com a concepção de LEM escolhida pelo professor-pesquisador em Educação Matemática.

Para entender o funcionamento do trabalho em sala de aula, da prática docente do professor de matemática, se faz necessário vivenciar experiências no campo de atuação, através da observação e da regência docente. Dessa forma o estagiário desenvolve habilidades e práticas para o seu campo de trabalho.

Com a visita a escola, o estagiário conversa com um professor titular da escola para fazer a escolha da turma e se situar para desenvolver um plano de ações de trabalho, objetivos e a problemática priorizada no desenvolvimento do estágio.

Sendo assim encontramos na sala de aula um laboratório de experimentação onde o professor, dependendo de suas características (e/ou formação) é levado a atuar como um pesquisador, que é uma das propostas para o profissional desde os tempos das disciplinas de estágio, além da observação e a regência com a produção de oficinas e sequências didáticas que venham a ser implementadas no efetivo magistério.

Dessa forma o professor em formação busca pesquisar novas formas e maneiras de desenvolver sua aula, de acordo com as dificuldades das turmas que acompanha, utilizando a experimentação, a sala de aula como espaço privilegiado para pesquisa, onde ele desenvolve um planejamento sistemático e tem na sequência didática o produto final,

documento ou registro, do que será desenvolvido durante a aula. Portanto a sequência didática mobiliza a pesquisa e o trabalho em sala de aula com o LEM.

A primeira proposta de sequência didática para o LEM foi pensada visando os alunos do 6º ano do ensino fundamental, onde a construção das sequências didáticas foi mobilizada pela busca em ensinar o sistema de numeração decimal e os algoritmos das operações básicas no conjunto dos números naturais, utilizando material manipulável, em particular o Material Dourado, haja vista que os estudantes dessa série costumam ter dificuldade na compreensão desses conteúdos. Nessa concepção o LEM é uma sala de aula diferenciada onde o recurso didático manipulável é instrumento de ensino e aprendizagem.

A segunda concepção foi pensado para o LEM no 2º ano do ensino médio, onde a construção da sequência didática é fundamentada nas dificuldades que os estudantes tem em compreender números binomiais, triângulo de Pascal, suas propriedades e o desenvolvimento e conceito de Binômio de Newton. Buscando fazer uma revisão dos conteúdos trabalhados em sala de aula, a sequência construída ŕ baseada em problemas e situações da própria sala de aula, ou seja, a própria sala de aula é o LEM, pois o espaço em si é utilizado para o desenvolvimento da aula.

A terceira concepção de LEM é o desenvolvimento de uma oficina de formação continuada para professores de Matemática. É desenvolvida uma metodologia para facilitar o ensino do sistema de numeração decimal e operações básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos números naturais utilizando para tanto material manipulável e recurso didático Material Dourado Montessori.

Apresentando assim conhecimento desse recurso didático em relação a esses dois conteúdos, construção do mesmo a partir de materiais simples de baixo custo, desenvolvimento de atividades, planos de aula, planos de ensino, e sugestões de atividades. Através dessas contribuições a sequência didática mobiliza a pesquisa e o trabalho em sala de aula com o LEM, consolidando assim o trabalho do professor-pesquisador em Educação Matemática.

4.1 LEM - Oficina de formação continuada de professores

A construção de uma oficina de formação continuada para professores de Matemática pesquisa surge da necessidade da prática docente do professor de Matemática, sendo então a união da pesquisa do LEM e da sequência didática, organizada na forma de oficina, como resultado final que o professor-pesquisador em Educação Matemática percorre dentro da sala de aula.

A escolha do tema para a oficina deve ser feita após conversa com os professores da escola, buscando encontram os pontos de estrangulamento. Pensando dessa forma, são apresentadas aqui cinco sequências didáticas que apresentam o planejamento sistemático para o aprendizado do Sistema de Numeração Decimal e das operações básicas no conjunto dos números Naturais, utilizando o material manipulável e recurso

didático Material Dourado Montessori.

Para construção dessa oficina é necessário uma profunda pesquisa, buscando referências teóricas para dar sustentabilidade na manipulação do Material Dourado, ou seja, saber como ele funciona e o porquê de sua utilização.

A segunda etapa deve ser a experimentação, ou seja, da prática docente ou de verificação do que foi proposto em teoria pelas sequências didáticas, por meio da utilização da concepção de LEM, como espaço diferenciado que utiliza um recurso didático manipulável para ensinar determinado conteúdo matemático.

A terceira etapa pautada-se na busca de referenciais teóricos para se entender o que é o conhecimento pedagógico do conteúdo e quais eram as bases de conhecimento para ser um professor, e, especificamente, um professor de matemática, para assim, consolidar esse conjunto de pesquisas em um produto final, uma formação continuada de professores de matemática.

A construção da oficina em si foi baseada no pensamento que todo o professor de matemática deve saber ensinar as operações básicas no conjunto dos números Naturais (Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão), e o Sistema de Numeração Decimal. Esses dois conhecimentos matemáticos são fundamentais para o desenvolvimento de outros conhecimentos da matemática, por isso a preocupação de fazer essa oficina.

Além dessa perspectiva, a utilização de um recurso didático visa uma formação complementar e não apenas da exposição de conteúdos ensinados de forma tradicional, mas sim de forma interessante para os estudantes, dando um caráter motivador a abordagem de aprendizagem.

A concepção de LEM desenvolvida foi a de que o LEM é um espaço ou ambiente, onde o professor ou um conjunto de professores se unem para planejar, refletir, dialogar e discutir sobre como se ensinar matemática de uma maneira melhor se utilizando dos recursos que possam existir nele como: livros, matérias manipuláveis, jogos entre outras que estiverem ao seu alcance.

5 I RESULTADOS

A pesquisa materializada através do LEM e com o uso do material manipulável em conjunto com as sequências didáticas (planejamento sistemático das ações desenvolvidas durante a aula) constitui uma evolução significativa quanto aos problemas recorrentes na compreensão de Sistema de Numeração Decimal, algoritmos das operações básicas no conjunto dos números naturais e quanto à elaboração de estratégias para a resolução de problemas, instigando a autonomia. A estratégia é vivenciada pela busca de recursos para o ensino do conhecimento matemático. Nesse caso a utilização do material manipulável e do fato que o mesmo se destina a atividades que auxiliam a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e os métodos para efetuar as operações fundamentais.

Portanto, usando o recurso didático para o ensino dos conhecimentos matemáticos supracitados o qual consideramos importante para esse ensino na aula de matemática no Ensino Fundamental. Geralmente, a partir de uma metodologia tradicional do ensino, os algoritmos são trabalhados por meio de exercícios repetitivos e cansativos para que o aluno "domine" o conteúdo, sem compreender minimamente o que faz. Assim o material dourado, como recurso facilita a compreensão das relações numéricas abstratas, tornando algo concreto para que os alunos aprendam.

Observa-se que professores estão reféns de uma metodologia que se utiliza basicamente aulas expositivas e uso do livro como recurso didático de forma retrógada, pois se utilizavam da linguagem de conjuntos para explicar as operações básicas no conjunto dos números naturais. Percebe-se também que os professores não tem formação e percepção do tipo professor-pesquisador, pois não apresentam iniciativa de buscar, pesquisar e entender melhores maneiras de ensinar esses conteúdos além de não utilizar o LEM e muito menos fazer um planejamento sistemático de suas ações utilizando sequências didáticas, que de alguma forma, caracterizaria todo contexto dessas aulas.

O assunto Binômio de Newton foi escolhido por ser considerado difícil de aprender pelos alunos e complexo de ensinar pelos professores, haja vista que é complicado de relacionar com o assunto que o antecede, Análise Combinatória. Após reconhecimento do terreno a ser trabalhado, deve-se construir uma sequência didática que contemple não somente o assunto a ser dado mas também resgatar e valorizar o tema anterior, fomentando a ideia de correlação entre os conteúdos sistematizados em sala de aula. O desenvolvimento da sequência didática pautada na revisão dos conteúdos referentes à Binômio de Newton deve contar com a ajuda do professor titular e com finalidade clara, para que seja viável avaliar o impacto positivo dessa intervenção.

A concepção de LEM a ser desenvolvida e transmitida para o professor é que o LEM é a própria sala de aula, onde se criam situações dentro do contexto do assunto a ser ensinado como uma forma de ensinar, conforme dificuldades e necessidades da turma, fundamentando assim, um planejamento sistemático de suas ações, ou seja, uma sequência didática a partir dessa concepção de LEM.

A construção de uma oficina de formação continuada para professores de Matemática pesquisa surge da necessidade da prática docente do professor de Matemática, sendo então a união da pesquisa do LEM e da sequência didática, organizada na forma de oficina, como resultado final que o professor-pesquisador em Educação Matemática percorre dentro da sala de aula. A escolha do tema para a oficina deve ser feita após conversa com os professores da escola, buscando encontram os pontos de estrangulamento. Pensando dessa forma, são apresentadas aqui cinco sequências didáticas que apresentam o planejamento sistemático para o aprendizado. Para construção dessa oficina é necessário uma profunda pesquisa, buscando referências teóricas para dar sustentabilidade, ou seja, saber como ele funciona e o porquê de sua utilização, na busca de referenciais teóricos

para se entender o que é o conhecimento pedagógico do conteúdo e quais eram as bases de conhecimento para ser um professor, e, especificamente, um professor de matemática, para assim, consolidar esse conjunto de pesquisas em um produto final, uma formação continuada de professores de matemática.

Além dessa perspectiva, a utilização de um recurso didático visa uma formação complementar e não apenas da exposição de conteúdos ensinados de forma tradicional, mas sim de forma interessante para os estudantes, dando um caráter motivador a abordagem de aprendizagem.

A concepção de LEM desenvolvida foi a de que o LEM é um espaço ou ambiente, onde o professor ou um conjunto de professores se unem para planejar, refletir, dialogar e discutir sobre como se ensinar matemática de uma maneira melhor se utilizando dos recursos que possam existir nele como: livros, matérias manipuláveis, jogos entre outras que estiverem ao seu alcance.

6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos argumentos exibidos durante os capítulos desse trabalho como: o contexto da pesquisa em sala de aula, as concepções de LEM e a compreensão e o entendimento das sequências didáticas na materialização e mobilização para pesquisa dentro do campo de atuação a Educação Matemática, é possível confirmar a hipótese de que a sala de aula é um espaço privilegiado da pesquisa.

De maneira teórica confirma-se isso pela fundamentação teórica dos autores mencionados ao longo do trabalho, construído o conceito de quem é o professor-pesquisador em Educação Matemática, quais são as principais concepções de LEM e a sua contribuição na materialização da pesquisa em sala de aula.

Durante essa etapa, o perfil de professor-pesquisador em Educação Matemática, foi sendo construído não somente na formação inicial, mas também na formação continuada, pois há mudança significativa na forma de como se ministra as aulas e também a mobilização de através das pesquisas feitas para o desenvolvimento de novas estratégias e sequencias didáticas.

Portanto, é importante na formação inicial e continuada dos professores de Matemática, existir o entendimento: das concepções de LEM, do papel do professor-pesquisador em Educação Matemática na sala de aula, do desenvolvimento e construção de sequências didáticas e oficinas de formação continuada, pois dessa forma vai haver a consolidação dessas ideias para o professor em formação, assim o desenvolvimento de seu trabalho e consequentemente de suas práticas didático-pedagógicas para o ensino e pesquisa em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALAGOAS CAIITE: CONGRESSO ACADÊMICO INTEGRADO DE INOVAÇÃO E TECNOLOGIA, 1., 2013, Maceió. **[Mesa redonda, O laboratório de ensino de matemática].** Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2013.

ANDRADE, Wendel Melo. **Laboratório de Ensino de Matemática–LEMA**. 2009. Disponível em: <http://www.matematicauva.org/disciplinas/semi2/laboratorio_de_ensino_de_matematica. pdf>. Acesso em: 07 abr. 2015.

BACKES, Lucas Henrique. **Professor pesquisador**. 2013. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/texto_Backes.pdf>. Acesso em: 07 abr. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Superior. **Referenciais curriculares nacionais dos cursos de licenciatura e bacharelado**. Brasília: MEC, 2010, p. 78 e 79.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica, 1998. 140 p. [Orientações curriculares para o ensino médio; v. 2].

COSTA, Letícia Vieira Oliveira. Educação matemática origem, características e perspectivas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 9. , 2007, Belo Horizonte. **Anais eletrônicos...** Belo Horizonte, 2007. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 07 abr. 2015.

FERREIRA, A. B. H. **Aurélio século XXI:** o dicionário da língua portuguesa. 4. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2002.

FRANCO, Maria A. S. Pesquisa-ação sobre a prática docente. **Educação e Pesquisa,** São Paulo, v. 31, n. 3, Set./Dez. 2005. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1517-97022005000300008&script=sci_arttext>.Acesso em: 07 abr. 2015.

GARCIA, Vera C. G. **Fundamentação teórica para as perguntas primárias:** o que é matemática? porque ensinar? como se ensina e como se aprende?. [s.l:s.n]. Apostila, 2007.

GODINO, J. **Perspectiva de la didática de lãs matemática como disciplina científica**. Granada: Universidade de Granada. 2003. [Programa de doctorado “Teoria de La educación Matemática”].

LIMA, Marcos H. M. **O professor, o pesquisador e o professor-pesquisador**. 2013. Disponível em: <http://www.amigosdolivro.com.br/lermais_materias.php? cd_materias=3754>. Acesso em: 07 abr. 2015.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MATOS, J. F. Educação matemática e cidadania. **Quadrante**, v.11, n.1, p.1-6. 2002. MEC/SEB. **Diretrizes Curriculares Nacionais**, 2008, p. 69.

MEDEIROS, J. E.; SOUZA, Cristiane Fernandes; PAIVA, P. A. A. Vivências no laboratório de ensino de matemática na formação do professor de matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011.

MIRANDA, Marília G. de. O professor pesquisador e sua pretensão de resolver a relação entre a teoria e a prática na formação de professores. **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores.** Campinas: Papirus, 5., 2006, p.129-143.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S., Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. Zetetiké, v. 11, n. 19, p. 57-80. 2003.

NÓVOA, Antônio. **O Professor pesquisador e reflexivo**. Entrevista concedida em 13 de setembro de 2001. Disponível em: < http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/entrevista.asp?cod_Entrevista=59 >. Acesso em: 07 abr. 2015.

PAVANELLO, Regina M. A Pesquisa na formação de professores de matemática para a escola básica. **Educação Matemática em Revista**, n. 15, ano 10, p. 8-13. 2003.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SOBRE O ORGANIZADOR

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e da Revista Multidisciplinar do Núcleo de Pesquisa e Extensão (RevNUPE); e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

ÍNDICE REMISSIVO

A

Al-Biruni 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74

A lei da alavanca de Arquimedes 278

Álgebras de Jordan 102, 103

Algoritmos evolutivos 296

Aplicações 75, 76, 89, 94, 98, 134, 135, 141, 143, 153, 164, 184, 220, 226, 269, 296, 306, 307, 331, 339, 342

Aprendizagem 1, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 55, 56, 57, 60, 61, 63, 70, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 108, 111, 113, 114, 115, 120, 122, 126, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 141, 142, 159, 160, 164, 166, 169, 175, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 193, 195, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 230, 233, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 317, 319, 320, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 337, 338, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 348, 349, 350, 352

B

BNCC 8, 91, 93, 99, 100, 134, 144, 154, 159, 162, 166, 168, 169, 214, 218, 222, 266, 269, 273, 274, 278, 279, 280

Brechó 195, 196, 197, 198, 199, 200

C

Combinatória 73, 296, 297, 351

Concepções docentes 165

Conhecimentos docentes 107

Consistência 239, 249, 252, 253, 254, 258, 259, 260, 342

Convergência 239, 249, 252, 253, 254, 256, 258, 260, 339

Convivência 18, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 63, 64, 238

Cotidiano 12, 18, 63, 91, 118, 153, 154, 164, 184, 196, 203, 204, 206, 208, 210, 221, 225, 236, 238, 264, 265, 270, 271, 306, 312, 313, 314, 316, 317, 326, 329, 346

Covid-19 42, 43, 52, 96, 141, 266

Currículo 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 56, 63, 95, 107, 110, 111, 122, 123, 124, 128, 129, 131, 132, 134, 135, 142, 168, 176, 212, 213, 269, 308, 342

Currículo crítico-emancipatório 13, 14, 15, 17, 18

Curva 48, 49, 50, 51, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89

Curvatura 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89

D

Desarrollo analítico 42, 45, 51, 52

Dificuldades 8, 10, 108, 122, 163, 175, 181, 189, 190, 198, 222, 265, 268, 306, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 339, 348, 349, 351

Direitos de aprendizagem 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 348

Distribution, inference 25

E

Educação a distância 135, 141, 142, 275, 312

Educação infantil 3, 165, 166, 167, 173, 175, 176, 177, 202, 203, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 269, 346

Educação matemática 1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 67, 90, 93, 100, 101, 107, 108, 109, 128, 129, 132, 133, 166, 176, 185, 193, 196, 200, 226, 227, 228, 230, 231, 233, 238, 264, 275, 277, 294, 306, 310, 323, 324, 325, 330, 336, 337, 338, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 355

Eixo das Abscissas 143, 144, 146, 147, 155, 157

Ensino 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 25, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 108, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 141, 142, 143, 144, 154, 159, 160, 162, 163, 164, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 314, 315, 318, 319, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 343, 344, 345, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 355

Ensino de matemática 1, 7, 10, 92, 95, 121, 124, 195, 201, 209, 217, 222, 224, 228, 229, 230, 231, 234, 278, 305, 308, 310, 319, 327, 328, 330, 336, 337, 343, 353

Ensino médio 8, 58, 98, 134, 142, 143, 154, 159, 162, 164, 178, 179, 180, 186, 192, 193, 195, 196, 197, 200, 210, 221, 222, 224, 226, 227, 263, 265, 266, 269, 270, 271, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 283, 293, 294, 295, 346, 349, 353

Estabilidade 239, 240, 242, 245, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 258, 259, 260

Estratégias didáticas 305

Expectation 25, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 40

F

Feedback automático 133, 134, 136, 141

Filosofia 74, 94, 112, 122, 200, 228, 229, 230, 231, 232, 236, 237, 238, 355

Formação de professores 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 21, 23, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 118, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 225, 268, 277, 310, 312, 315, 316, 343, 353, 354, 355

Formação docente 7, 13, 18, 22, 23, 115, 131, 132, 165, 175, 268, 277

Formação para o trabalho 312, 321

Função afim 90, 96, 97, 98, 99, 100

Funções polinomiais de 2º grau 143, 144, 152, 154, 158, 163

G

Geogebra 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 134, 293, 294, 345

Geogebra 3D 87, 88

Geometria 73, 75, 76, 81, 89, 91, 126, 133, 134, 135, 144, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 183, 184, 185, 192, 193, 194, 211, 212, 214, 215, 278, 279, 280, 285, 294, 340

Geometria plana 178, 179, 180, 183, 185, 192, 193, 278, 279

Graduações 102, 104, 331

H

Hélice 75, 76, 86, 87, 88, 89

História da matemática 65, 66, 67, 73, 74, 234

I

Identidades polinomiais 102, 103, 104, 105, 331, 332, 333, 334

J

Jogos 170, 201, 204, 205, 206, 208, 209, 214, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 343, 345, 350, 352

John Dewey 159, 228, 229, 236, 238

L

Leveque 250, 261

Lúdico 114, 132, 202, 203, 205, 208, 209, 213, 234, 236, 238, 272, 276, 278

M

Matemática 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 21, 22, 24, 42, 44, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 64, 65, 66, 67, 70, 73, 74, 75, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 102, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144, 153, 154, 158, 161, 164, 166, 169, 170, 172, 175, 176, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 189, 193, 194, 195, 196, 197,

198, 200, 201, 202, 205, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 249, 263, 264, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 285, 293, 294, 295, 305, 306, 307, 308, 310, 312, 313, 314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355

Matemática financeira 196, 197, 198, 200, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 227, 263, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 277

Matemática Islâmica 65, 66

Metodologia 1, 6, 7, 10, 67, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 109, 113, 116, 121, 136, 141, 159, 160, 176, 178, 179, 180, 181, 185, 193, 195, 198, 208, 231, 238, 271, 300, 305, 308, 325, 326, 328, 338, 340, 349, 351

Múltiplas tentativas 133, 136

N

Norma-2 239, 245, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260

Novas tecnologias 133, 272, 273, 275, 277, 312

O

O princípio de Cavalieri 278, 281, 283, 289

P

Planejamento 100, 126, 161, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 196, 210, 216, 217, 218, 222, 225, 238, 269, 279, 280, 337, 338, 339, 343, 344, 347, 348, 349, 350, 351

Plano cartesiano 143, 144, 153, 157, 340

Podcast 263, 264, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277

Polígonos mágicos 296, 297, 300, 301, 303

Polígonos mágicos degenerados 296, 297

Políticas públicas 8, 9, 10, 18, 21, 315, 316

Pragmatismo 228, 229, 230

R

Resolução de problemas 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 121, 174, 175, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 188, 192, 193, 224, 234, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 327, 328, 340, 350

S

Sampling 25, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39

Simulated annealing 296, 299, 300, 302, 303

Software geogebra 42, 52, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 90

Statistical investigation processes 25

Statistics education 25, 26, 28, 30, 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41

T

Territórios virtuais 312, 313, 314

V

Variability 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38

Variáveis 96, 102, 103, 135, 143, 144, 146, 152, 153, 185, 209, 216, 217, 218, 301, 303

Vértices da função 143

Visualización gráfica 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

O Fortalecimento do Ensino e da Pesquisa Científica da Matemática 2

Atena Editora
Ano 2022